511.3
T42u

THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY
511.3
~~512.899~~
T42u

MATHEMATICS
DEPARTMENT

The person charging this material is responsible for its return to the library from which it was withdrawn on or before the **Latest Date** stamped below.

Theft, mutilation, and underlining of books are reasons for disciplinary action and may result in dismissal from the University.

UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY AT URBANA-CHAMPAIGN

OCT 13 1978
OCT 13 RECD

L161—O-1096

ÜBER DIE GEGENSEITIGE LAGE GLEICHER TEILE GEWISSER ZEICHENREIHEN

VON

AXEL THUE

(VIDENSKAPSSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1912. No. 1)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA

IN KOMMISSION BEI JACOB DYBWAD

1912

UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY

UNIVERSITETSBIBLIOTEKET
OSLO

Fremlagt i den mat.-naturv. klasses møte den 19de april 1912.

A. W. BRØGGERS BOKTRYKKERI A/S

T42u
T42u
LIBRARY UNIVERSITY OF ILLINOIS URBANA

Für die Entwicklung der logischen Wissenschaften wird es, ohne Rücksicht auf etwaige Anwendungen, von Bedeutung sein, ausgedehnte Felder für Spekulation über schwierige Probleme zu finden. Wir werden hier in dieser Abhandlung einige Untersuchungen aus einer Theorie über Zeichenreihen, die gewisse Berührungspunkte mit der Zahlentheorie darbietet, mitteilen.

KAP. I.

Einleitende Bemerkungen.

1. Eine Zeichenreihe, in der jedes Zeichen einem von n gegebenen verschiedenen Zeichen

$$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$$

gleich ist, kann mancherlei Bedeutung haben.

Jedes Buch kann z. B. als eine solche Reihe von Typenzeichen aufgefaßt werden.

Die Zeichen Z und die von ihnen gebildeten Reihen können ferner mathematische Größen, Substitutionen oder ganz andere Begriffe bedeuten.

Indem n eine beliebig gegebene ganze positive Zahl und R eine Reihe von m Zeichen, wobei jedes Zeichen einem von n gegebenen Zeichen gleich ist, bedeuten, kann man, wie sofort zu sehen ist, m so groß wählen, daß es unmöglich wird R so zu wählen, daß R nicht zwei einander gleiche Reihen von p Zeichen, wobei p beliebig gegeben ist, enthalten wird. Dieser Fall muß ja notwendigerweise eintreten, wenn $m \geqq n^p + p$.

Hat R auf obenstehende Weise die Bedeutung eines Buches, so brauchen die hier genannten unvermeidlichen Wiederholungen für das Verständnis doch nicht überflüssig zu sein.

Mathematics 12 MAY 1914 Stechert 90
7 0 '14 ŽT.
275798

Ohne die etwaige Bedeutung der Zeichenreihen in Betracht zu ziehen wird es von Interesse sein zu untersuchen, ob man endliche oder unendliche Reihen, wo die Reihenfolge der Zeichen gewisse Eigenschaften besitzen, konstruieren kann.

Es ist zu erwarten, daß sich die Ergebnisse solcher Untersuchungen auf gewöhnliche mathematische Fragen anwenden lassen. Da man z. B. einen Dezimalbruch, der nicht zuletzt periodisch wird, bilden kann, gibt es folglich irrationale Zahlen.

Eine sehr allgemeine Frage dieser Art über das Auftreten von gleichen Partien einer Zeichenreihe ist die folgende:

Es bezeichne

$$R_1, R_2, \ldots, R_\alpha$$

α gegebene verschiedene endliche Zeichenreihen, worin jedes Zeichen entweder einem der β gegebenen Zeichen

$$P_1, P_2, \ldots, P_\beta$$

oder einem der γ gegebenen Zeichen

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_\gamma$$

gleich ist. Ferner seien

$$A_1, A_2, \ldots, A_\delta$$

δ neue gegebene Zeichen, während

$$S_1, S_2, \ldots, S_\beta$$

und

$$T_1, T_2, \ldots, T_\gamma$$

beziehungsweise β und γ Reihen dieser Zeichen A bedeuten sollen.

Endlich bedeuten

$$N_1, N_2, \ldots, N_\alpha$$

die aus beziehungsweise den Reihen R, indem man hier statt jedes Zeichens P_k die entsprechende Reihe S_k und statt jedes Zeichens Q_h die entsprechende Reihe T_h geschrieben hat, gebildeten Reihen.

Man kann sich nun die Frage stellen, ob es möglich wird, eine solche unendliche Reihe der δ Zeichen A zu definieren, daß diese Reihe, wenn die Reihen S gegeben sind, bei jeder Wahl der Reihen T keine der Reihen N enthalten wird.

Die hier erwähnte unendliche Zeichenreihe mit einem Anfangszeichen wollen wir mehr speziell eine *einfach unendliche Zeichenreihe* nennen.

Eine Zeichenreihe ohne Anfang oder Ende, bei der also jedes Zeichen das mittelste von drei aufeinander folgenden Zeichen bildet, nennen wir eine *geschlossene* oder *zweifach unendliche Reihe*, je nach dem die Anzahl der Zeichen der Reihe endlich oder unendlich ist.

Unter einer *offenen* Zeichenreihe verstehen wir jede endliche, aber nicht geschlossene Reihe.

Das System von zwei Zeichen sowohl wie ein einziges Zeichen allein kann als eine geschlossene Reihe aufgefaßt werden.

Unter einer *Unterreihe* einer gegebenen Reihe R verstehen wir jede Reihe, die von nacheinander folgenden Zeichen von R gebildet ist. Jedes Zeichen von R wie R selbst wollen wir als eine Unterreihe von R rechnen.

Zwei Unterreihen einer gegebenen Reihe R heißen, wenn sie durch »Verschiebung« längs der Reihe R ineinander übergeführt werden können, einander *gleich*.

2. Es wird nun von Interesse sein, Zeichenreihen zu konstruieren, wo einander gleiche Zeichenreihen am weitesten von einander entfernt sind.

In jeder Zeichenreihe mit mehr als $n + 1$ Zeichen, wo jedes Zeichen einem von n gegebenen Zeichen gleich ist, können nicht überall je zwei beliebige einander gleiche Unterreihen durch mehr als $n - 2$ zwischenliegende Zeichen getrennt sein.

Wir wollen später zeigen, wie man in den genannten n Zeichen, wenn $n > 1$, solche unendliche und solche geschlossene Zeichenreihen, bei denen die Anzahl der Zeichen größer als eine beliebig gegebene Zahl ist, bilden kann, daß je zwei einander gleiche Unterzeichen dieser Reihen immer durch mehr als $n - 3$ Zeichen getrennt sind.

Jede nicht geschlossene Zeichenreihe, in der jedes Zeichen einem von n gegebenen verschiedenen Zeichen gleich ist, nennen wir, wenn je zwei einander gleiche Unterreihen der Reihe überall durch wenigstens $n - 2$ Zeichen getrennt sind, in Bezug auf die n Zeichen *irreduktibel*[1]. Sonst wird die Reihe *reduktibel* genannt.

Wir haben diese Bezeichnung benutzt, da eine Zeichenreihe ja eine solche Bedeutung haben kann, daß sie, wenn man in der Reihe Unterreihen gewisser Formen entweder ganz entfernen oder durch Reihen mit weniger Zeichen ersetzen würde, diese Bedeutung nicht verlieren wird. Könnte man, wenn die Anzahl der Zeichen der Reihe größer als eine gewisse Zahl sein sollte, solche Formen nicht vermeiden, so gäbe es nur eine endliche Anzahl solcher Reihen, die nicht dieselbe Bedeutung hätten.

[1] In einer später erwähnten Abhandlung habe ich das Wort »irreduktibel« in einer anderen Bedeutung gebraucht.

Es bezeichne beispielweise U eine Reihe von positiven Größen, die abwechselnd mit den Zeichen + und — versehen sind. Besitzt nun U, abgesehen von den Zeichen + und —, zwei einander gleiche Größenreihen A und B, die durch eine ungerade Anzahl von Größen getrennt sind, wenn die Anzahl der Größen von A und B gerade ist, während A und B unmittelbar aufeinander folgen, wenn diese Zahl ungerade ist, dann behält U seinen algebraischen Wert, nachdem man A und B nebst ihren entsprechenden Zeichen + und — entfernt hat. Ferner sind die Größen der erhaltenen Reihe fortwährend abwechselnd mit den Zeichen + und — versehen.

Ein anderes Beispiel ist folgendes:

P bedeute eine Reihe von keilförmigen Glasprismen, deren Kanten alle parallel und so gestellt sind, daß ein Lichtstrahl senkrecht auf den Kanten sie alle der Reihe nach passieren kann.

Q bedeute eine ähnliche von Prismen derselben Art wie P gebildete Reihe, und sei so beschaffen, daß die äußeren Enden jedes Lichtstrahls, der alle Prismen von Q senkrecht zu den Kanten passiert hat, immer parallel werden.

Enthält dann P eine Reihe Q, so erleidet der Winkel zwischen den äußeren Enden eines Lichtstrahls der genannten Art keine Änderung durch Entfernung von Q.

Endlich wollen wir irreduktible geschlossene Reihen definieren. Zuvor wollen wir ein paar Bemerkungen machen.

Es bedeute U eine beliebige offene Zeichenreihe von r Zeichen, bei der jedes Zeichen einem von n gegebenen Zeichen gleich ist, während

$$r > 2(n-3), \quad r \geqq 1, \quad n \geqq 2.$$

Ist dann erstens $k \geqq 2r - n + 3$, so bilden je k nacheinander folgende Zeichen der unendlichen Reihe $\ldots UUUU \ldots$ eine in Bezug auf die n Zeichen reduktible Unterreihe.

Enthält zweitens die endliche offene Reihe UUU eine reduktible Unterreihe S mit weniger als $2r - n + 3$, aber mit mehr als $r - n + 3$ Zeichen, so enthält sie auch eine in Bezug auf die n Zeichen reduktible Unterreihe, die in UU enthalten ist, mit $r - n + 3$ oder weniger Zeichen. Ist also U so beschaffen, daß je $r - n + 3$ nacheinander folgende Zeichen von UU immer eine in Bezug auf die n Zeichen irreduktible Reihe bilden werden, dann muß jede in Bezug auf die n Zeichen reduktible Unterreihe von UUU oder von der unendlichen periodischen Reihe $\ldots UUUU \ldots$ wenigstens $2r - n + 3$ Zeichen enthalten.

Enthält nämlich S keine reduktible Unterreihe mit $r-n+3$ oder weniger Zeichen, so enthält S, da $r>2(n-3)$, eine reduktible Unterreihe $C=AT=TB$, wo, indem c die Anzahl der Zeichen von C, p die Anzahl der Zeichen von A und B und q die Anzahl der Zeichen von T bedeuten:

$$r-n+3<c=2q+n-3<2r-n+3$$
$$p=q+n-3$$
$$q<r-n+3$$

Da $c<2r-n+3\leqq 2r+1$, so bildet C eine Unterreihe von einer Unterreihe WW von UUU, wo W aus r Zeichen zusammengesetzt ist. Da $q+n-3<r$, kann WW ferner so gewählt werden, daß $W=DT$,

$$WW=DTDT=DCE=DTBE=DATE=DAFT,$$

wo E und F wenigstens ein Zeichen enthalten.

Die Reihe $TE=FT$, die $r-n+3$ oder weniger als c Zeichen enthält, ist aber reduktibel und enthält folglich eine reduktible Unterreihe mit weniger als $r-n+3$ Zeichen.

Eine geschlossene Zeichenreihe von r Zeichen, in der jedes Zeichen einem von n gegebenen Zeichen gleich ist, während $r>2n-6$, wird, wenn je $r-n+3$ nacheinander folgende Zeichen der Reihe immer eine in Bezug auf die n Zeichen irreduktible offene Reihe bilden, in Bezug auf die genannten n Zeichen irreduktibel genannt. Sonst sagen wir, daß die Reihe reduktibel ist.

Wenn $n>2$, während r beliebig ist, wollen wir mehr allgemein unter einer *irreduktiblen geschlossenen Reihe* jede geschlossene Reihe verstehen, bei der je zwei einander gleiche und außerhalb einander liegende Unterreihen überall durch wenigstens $n-2$ Zeichen getrennt sind. Enthält dagegen die geschlossene Reihe zwei einander gleiche und außerhalb einander liegende Unterreihen, die durch weniger als $n-2$ Zeichen getrennt sind, so wird die Reihe *reduktibel* genannt.

3. Haben wir ein System von verschiedenen offenen Zeichenreihen, die alle mit demselben Zeichen z. B. von links anfangen, so können wir von den Zeichen eine baumähnliche Figur, die wir eine *Zeichenreihenverzweigung* nennen wollen, bilden, sodaß diese Figur auf eine einfache Weise alle die genannten Reihen enthält.

Wir wollen die erwähnte Figur definieren.

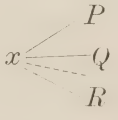
Enthält jede Reihe des Systems höchstens zwei Zeichen, insofern als ein einziges Zeichen auch als eine besondere Reihe aufgefaßt werden soll, und bedeuten xa, xb, ..., xc alle die von zwei Zeichen gebildeten Reihen des Systems, wobei x das erste Zeichen ist, so enthält die nebenstehende

Figur, wo man die Zeichen $a, b, \ldots, c$ durch ebenso viele Striche mit dem Zeichen x verbunden hat, alle Reihen des Systems, und soll die dem System entsprechende Verzweigung bilden.

x heißt das Anfangszeichen und $a, b, \ldots, c$ die Endzeichen der Verzweigung.

Enthält das System nur eine einzige Reihe, die nur von einem einzigen Zeichen gebildet wird, so soll das Zeichen selbst die dem System entsprechende Verzweigung vorstellen. Das Zeichen bildet gleichzeitig das Anfangs- und die Endzeichen der Verzweigung.

Enthält endlich — mehr allgemein — das System Reihen mit mehr als zwei Zeichen, so sollen $xA, xB, \ldots, xC$ alle Systemreihen mit mindestens zwei Zeichen bezeichnen, indem x das Anfangszeichen aller Reihen ist, während $A, B, \ldots, C$ die Restreihen der Reihen $xA, xB, \ldots, xC$ bedeuten. Ferner sollen $P, Q, \ldots, R$ alle zu den Reihen $A, B, \ldots, C$ gehörigen Verzweigungen bezeichnen, indem jede der Verzweigungen $P, Q, \ldots, R$ dem System aller dieser Reihen $A, B, \ldots, C$, die dasselbe Anfangszeichen wie die genannte Verzweigung haben, entspricht. Die dem gegebenen Reihensystem entsprechende Verzweigung U soll dann aus dem Zeichen x und den Verzweigungen $P, Q, \ldots, R$ gebildet werden, indem das Zeichen x, wie auf nebenstehender Figur gezeigt ist, durch Striche mit den Anfangszeichen der genannten Verzweigungen verbunden wird.



x bildet das Anfangszeichen von U, und die Endzeichen von $P, Q, \ldots, R$ bilden die Endzeichen von U.

Hierdurch sind die Verzweigung und ihre Anfangs- und Endzeichen völlig definiert.

Die Striche, die die Reihenfolge der Zeichen markieren sollen, können in der Verzweigungsfigur überall ausgelassen werden, wo die Reihenfolge nicht mißzuverstehen ist.

Nebenstehende Fig. I zeigt den Anfang der Verzweigung, die alle in Bezug auf die n Zeichen $a, b, c, d, e, f, \ldots, h, k$ irreduktible Reihen enthält, welche mit der Reihe $abcdef \ldots h$ anfangen. $n \leqq 8$.

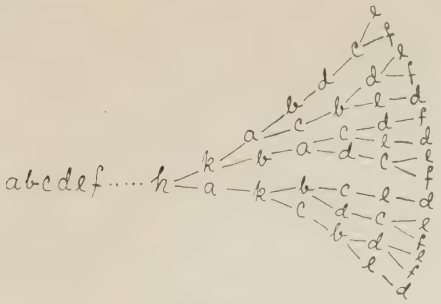


Fig. 1.

4. Wir merken uns folgende Sätze, die unmittelbar einleuchten:

$n - 1$ beliebige auf einander folgende Zeichen einer in Bezug auf n verschiedene Zeichen irreduktiblen, nicht ringförmigen Reihe sind alle verschieden.

Sind R und $R\delta$ zwei in Bezug auf n verschiedene Zeichen a, b, ... und c irreduktible, offene Zeichenreihen, wovon R mehr als $n - 2$ Zeichen enthält, während δ eines der Zeichen a, b, ... und c bedeutet, dann muß δ von jedem der letzten $n - 2$ rechten Zeichen von R verschieden sein. δ wird folglich einem der zwei anderen der n Zeichen a, b, ... und c gleich sein.

Kann man R, wenn R mindestens n Zeichen enthält, durch jedes der genannten zwei Zeichen nach rechts verlängern, ohne daß die erhaltene Reihe reduktibel wird, so sind die zwei Zeichen beziehungsweise den zwei ersten der n letzten rechten Zeichen von R gleich.

Bedeuten A das Anfangszeichen und B ein beliebiges Zeichen einer Verzweigung, die alle in Bezug auf n verschiedene Zeichen irreduktible offene Reihen enthält, welche mit demselben Zeichen A anfangen, während die Reihe der Verzweigung, die mit A anfängt und mit B endet, mindestens aus $n - 2$ Zeichen zusammengesetzt ist, dann verzweigt sich die Verzweigung in B in höchstens zwei Zweigen.

Eine in Bezug auf n verschiedene Zeichen irreduktible, offene endliche Reihe R läßt sich dann, und zwar nur dann, höchstens durch ein einziges der n Zeichen nach rechts verlängern, ohne reduktibel zu werden, wenn R entweder die Form UPU hat oder die Form $QUPU$, wo P von $n - 2$ Zeichen gebildet ist.

Jede Zeichenreihe UPU, in der jedes Zeichen einem von n verschiedenen Zeichen gleich ist, und wo $P\,n - 2$ Zeichen enthält, während die Anzahl der Zeichen von U kleiner als n und größer als 2 ist, muß in Bezug auf die n Zeichen reduktibel sein.

Endet eine in Bezug auf n verschiedene Zeichen irreduktible Zeichenreihe PAP in einer Reihe QBQ, wo A und B $n-2$ Zeichen enthalten, während P mehr Zeichen als Q besitzt, dann ist QBQ völlig in P enthalten. P ist also entweder mit QBQ identisch, oder P endet nach rechts in einer Reihe QBQ. A und B fangen mit verschiedenen Zeichen an. Die Reihe PAP, oder mehr allgemein, die Reihe $SPAP$ läßt sich hier nicht nach rechts, ohne reduktibel zu werden, verlängern.

Eine in Bezug auf n verschiedene Zeichen irreduktible Reihe kann z. B. nicht nach rechts in jeder der drei verschiedenen Reihen PAP, QBQ und RCR, wo jede der Reihen A, B und C $n-2$ Zeichen enthält, enden.

Existiert eine in Bezug auf n verschiedene Zeichen einfach unendliche irreduktible Zeichenreihe, so kann man bei jeder beliebig gegebenen ganzen positiven Zahl p immer eine in Bezug auf die genannten n Zeichen irreduktible Reihe von p Zeichen derart konstruieren, daß diese Reihe, ohne reduktibel zu werden, durch jede von zwei der n Zeichen nach derselben Richtung verlängert werden kann.

Könnte man nämlich für eine gewisse Zahl p jede irreduktible Reihe von p Zeichen, wenn die erhaltene Reihe nicht irreduktibel werden soll, höchstens durch ein einziges der n Zeichen verlängern, so würde dasselbe auch für alle größeren Zahlen p gelten. Jede Reihe mit mehr als p Zeichen endet ja in einer Reihe von p Zeichen.

Die genannte einfach unendliche Reihe, die dann durch seine ersten p Zeichen völlig definiert wäre, ginge hier folglich in eine periodische, nicht irreduktible Reihe über, was gegen unsere Voraussetzung streitet.

5. Es bedeuten U und P zwei solche in Bezug auf n verschiedene Zeichen irreduktible Zeichenreihen, sodaß UP und PU auch irreduktibel werden, während die Anzahl der Zeichen von P gleich $n-3$ ist, und $n \geqq 3$. Enthält dann die reduktible Reihe UPU eine kleinere reduktible Reihe WQW, wo Q aus $n-3$ Zeichen zusammengesetzt ist, so enthält WQW entweder weniger Zeichen als UP oder PU, oder dieselbe Anzahl Zeichen.

Bedeutet P eine beliebige reihenförmige Anzahl $n-3$ Zeichen einer in Bezug auf n verschiedene Zeichen irreduktible ringförmige Reihe mit mehr als $n-3$ Zeichen, während U den übrigen Teil des Ringes bedeutet, dann enthält, wenn $n \geqq 3$, die reduktible offene Reihe UPU keinen kleineren reduktiblen reihenförmigen Teil.

Enthält U mehr als ein einziges Zeichen, und setzt man $U = Hp$, $pP = K$, wo p ein einziges der n Zeichen bedeutet, dann wird HKH, wobei K $n-2$ Zeichen enthält, irreduktibel.

Enthält unser Ring eine Reihe hkh, wo k von $n-2$ Zeichen gebildet ist, während die Restreihe mindestens $n-2$ Zeichen enthält, so kann man aus dem Ringe eine irreduktible Reihe bilden, die nicht nach der einen Richtung verlängert werden kann, ohne reduktibel zu werden.

Der Ring enthält ja eine Reihe $hkhP$, wo P von $n-3$ Zeichen gebildet ist. Bezeichnet qS, wobei q ein einziges Zeichen bedeutet, die Restreihe, so kann die irreduktible Reihe $Shkh\ Pq\ Shkh$ nicht nach rechts verlängert werden, ohne reduktibel zu werden.

Bedeutet UPU eine in Bezug auf n verschiedene Zeichen irreduktible Reihe, bei der die Anzahl der Zeichen von P gleich $n-2$ oder $n-1$ ist, während $n \geqq 3$, und U mindestens ein Zeichen enthält, dann wird auch die Reihe PUP in Bezug auf die n Zeichen irreduktibel. Gleichzeitig kann man die offene Reihe UP in einen irreduktiblen Ring zusammenbiegen. Bedeutet q die Anzahl der Zeichen von UP, so kann man aus dem Ringe q irreduktible Reihen von der Form UPU bilden.

Bedeutet R eine in Bezug auf n verschiedene Zeichen irreduktible offene Reihe mit r Zeichen, wo $r > 2n-6$, so läßt sich R dann, und zwar nur dann, wenn die Reihe RR keine reduktible Unterreihe mit weniger als $r-n+4$ Zeichen enthält, in einen in Bezug auf die n Zeichen irreduktiblen geschlossenen Ring zusammenbiegen.

6. Je zwei zweifach unendliche Zeichenreihen

$$\ldots S_{-2}\ S_{-1}\ S_0\ S_1\ S_2 \ldots$$

und

$$\ldots T_{-2}\ T_{-1}\ T_0\ T_1\ T_2 \ldots$$

wo jedes S und jedes T einem von n gebenen Zeichen gleich ist, sollen, wenn eine solche ganze Zahl k existiert, daß T_x und S_{x+k} für jeden ganzen Wert von x immer einander gleich werden, einander kongruent genannt werden.

Satz 1. *Es bedeute R eine zweifach unendliche Zeichenreihe, in der jedes Zeichen einem von n gegebenen Zeichen gleich ist. R ist außerdem so beschaffen, daß je zwei einander gleiche Unterreihen von R entweder ganz außerhalb einander liegen oder höchstens eine gegebene Anzahl h gemeinsame Zeichen besitzen.*

Indem L, M, . . . und N gewisse gegebene endliche offene Zeichenreihen bedeuten, in denen jedes Zeichen entweder einem der genannten n Zeichen oder einem anderen von m gegebenen Zeichen gleich ist, so soll R ferner so beschaffen sein, daß man unmöglich in den Reihen L, M, . . . und N statt jedes in ihnen vorkommenden der m Zeichen eine solche Reihe

der n Arten von Zeichen schreiben kann, daß eine oder mehrere von den auf diese Weise aus den Reihen L, M, . . . und N gebildeten Reihen in R vorkommen.

Hat endlich R die Eigenschaft, daß jede Unterreihe von ihr wenigstens zwei Mal, und also auch unendlich viele Male, in R auftritt, dann kann man aus R unendlich viele nicht kongruente, zweifach unendliche Reihen derselben Art wie R bilden.

Beweis.

Indem A_0^0 eine beliebige gewählte Unterreihe von R bedeutet, kann man nach einer im voraus festgesetzten Regel nach und nach solche von Reihen A gebildeten Unterreihen

$$\begin{aligned} A_0^0 &= D_0 \\ A_{-1}^1 A_0^1 A_1^1 &= D_1 \\ A_{-2}^2 A_{-1}^2 A_0^2 A_1^2 A_2^2 &= D_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ A_{-k}^k \ldots A_{-1}^k A_0^k A_1^k \ldots A_k^k &= D_k \end{aligned}$$

von R finden, wo A_r^p und A_r^q immer gleiche Reihen sind, während je zwei einander gleiche Reihen $A_{-\delta}^{\delta+1} \ldots A_{-1}^{\delta+1} A_0^{\delta+1} A_1^{\delta+1} \ldots A_\delta^{\delta+1}$ und $A_{-\delta}^{\delta} \ldots A_{-1}^{\delta} A_0^{\delta} A_1^{\delta} \ldots A_\delta^{\delta}$ für jeden Wert von δ ganz außerhalb einander in R liegen. Wenn D_{k-1} gefunden ist, kann man außerdem bei jedem Wert von $k > 0$ die Unterreihe $A_{k-1}^k \ldots A_{-1}^k A_0^k A_1^k \ldots A_{k-1}^k$ nach einer beliebig festgesetzten Regel außerhalb D_{k-1} wählen und dann A_{-k}^k und A_k^k nach einer bestimmten Regel so groß wählen, daß D_{k-1} eine Unterreihe von D_k bilden wird.

Ist B_β jeder der Reihen A_β^α gleich, dann sind R und die zweifach unendliche Reihe

$$\ldots B_{-2} B_{-1} B_0 B_1 B_2 \ldots$$

wovon jeder Teil auch einen Teil von R gleich wird und also dieselben früher genannten Eigenschaften wie R besitzen, wie sofort zu sehen ist, einander nicht kongruent.

Durch das hier gezeigte Verfahren kann man ähnliche Sätze über einfach unendliche Reihen herleiten.

Eine Zeichenreihe, in der jedes Zeichen einem der n gegebenen Zeichen $p_1, p_2, \ldots$ und p_n gleich ist, können wir durch den Ausdruck $R[p_1, p_2, \ldots, p_n]$ bezeichnen. Bedeuten dann $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ein

System von n Zeichenreihen, so verstehen wir unter dem Ausdruck $R[P_1, P_2, \ldots, P_n]$ diejenige Reihe, die man aus $R[p_1, p_2, \ldots, p_n]$ erhält, indem man hier statt jedes p_x bei jedem Wert von x überall P_x schreibt.

Problem.

Es bedeuten $A, B, \ldots$ und C n gegebene offene, endliche Zeichenreihen, in denen jedes Zeichen einem von n gegebenen Zeichen $a, b, \ldots$ und c gleich ist.

Man kann sich dann die Frage stellen, ob eine solche von Zeichen $a, b, \ldots$ und c gebildete, zweifach unendliche Reihe $R_0[a, b, \ldots, c]$ existiert, daß es möglich wird, eine unendliche Serie von solchen zweifach unendlichen Zeichenreihen

$$R_1[a, b, \ldots, c], \quad R_2[a, b, \ldots, c], \quad R_3[a, b, \ldots, c], \ldots$$

bei denen jedes Zeichen einem der n Zeichen $a, b, \ldots$ oder c gleich ist, zu bestimmen, daß bei jedem Wert von q:

$$R_{q+1}[A, B, \ldots, C] = R_q[a, b, \ldots, c]$$

Kommt dann jedes der Zeichen $a, b, \ldots$ und c in jeder der Reihen $A, B, \ldots$ und C vor, so wird jede Unterreihe von $R_0[a, b, \ldots, c]$ unendlich vielen anderen Unterreihen von R_0 gleich sein.

Ist $S_0[a, b, \ldots, c]$ eine solche von Buchstaben $a, b, \ldots$ und c gebildete offene, endliche Zeichenreihe, daß

$$S_0[A, B, \ldots, C] = M_0[a, b, \ldots, c]\, S_0[a, b, \ldots, c]\, N_0[a, b, \ldots, c]$$

wo $M_0[a, b, \ldots, c]$ und $N_0[a, b, \ldots, c]$ offene endliche von Buchstaben $a, b, \ldots$ und c gebildete Reihen mit jedenfalls einem Buchstaben sind, dann kann man eine spezielle Lösung des obenstehenden Problems folgendermaßen finden:

Schreiben wir für jeden ganzen positiven Wert von $x + 1$:

$$\begin{aligned}
S_{x+1}[a, b, \ldots, c] &= S_x[A, B, \ldots, C] \\
M_{x+1}[a, b, \ldots, c] &= M_x[A, B, \ldots, C] \\
N_{x+1}[a, b, \ldots, c] &= N_x[A, B, \ldots, C] \\
S_x[a, b, \ldots, c] &= S_x \\
M_x[a, b, \ldots, c] &= M_x \\
N_x[a, b, \ldots, c] &= N_x
\end{aligned}$$

so bekommt man

$$S_{x+1} = M_x S_x N_x = M_x \ldots M_1 M_0 S_0 N_0 N_1 \ldots N_x$$

Definiert man folglich die zweifach unendliche Reihe $R[a, b, \ldots, c]$ durch die Gleichung:

$$R[a, b, \ldots, c] = \ldots M_2 M_1 M_0 S_0 N_0 N_1 N_2 \ldots$$

so wird:

$$R[A, B, \ldots, C] = R[a, b, \ldots, c]$$

Nach diesen einleitenden Bemerkungen wollen wir für einige Werte von n gewisse in Bezug auf n verschiedene gegebene Zeichen irreduktibler Reihen näher untersuchen.

Es wird sich zeigen, daß irreduktible geschlossene oder zweifach unendliche Zeichenreihen und *Diophantische* Gleichungen einige Analogien darbieten.

KAP. II.

Zeichenreihen aus zwei Arten von Zeichen.

7. Eine beliebige offene oder unendliche Zeichenreihe R, in der jedes Zeichen einem von zwei verschiedenen gegebenen Zeichen gleich ist, wird dann, und zwar nur dann, in Bezug auf die zwei Zeichen irreduktibel genannt, wenn je zwei einander gleiche, aber nicht identische Unterreihen der Reihe überall außerhalb einander liegen, ohne also eine gemeinsame Partie zu besitzen.

Bedeutete R hier dagegen eine geschlossene Reihe vor r Zeichen, so würde R dann, und auch nur dann, in Bezug auf die zwei Zeichen irreduktibel genannt werden, wenn die von je $r + 1$ auf einander folgenden Zeichen des Zeichenringes R gebildete offene Reihe immer in Bezug auf die zwei Zeichen irreduktibel wird.

Man sieht sofort ein, daß eine in Bezug auf zwei Arten von Zeichen reduktible, d. h. nicht irreduktible, Reihe immer zwei einander gleiche Unterreihen, die ein einziges Zeichen gemeinsam haben, besitzen.

Nebenstehende baumähnliche Fig. 2 enthält alle in Bezug auf zwei Zeichen a und b irreduktible Reihen, die mit demselben Zeichen a anfangen und von höchstens 12 Zeichen gebildet sind. Die Endzeichen der Reihen, die an dem freien Ende nicht verlängert werden können, ohne reduktibel zu werden, sind durch einen Kreis markiert.

Durch die Entwicklung einer Reihe von Sätzen wollen wir unter anderm nachweisen, wie man von Buchstaben a und b unendliche Reihen, die in Bezug auf a und b irreduktibel werden, bilden kann.

Fig. 2.

Satz 2. *Bedeutet R eine Reihe von Reihen $A = ab$ und $B = ba$, während x ein a oder ein b bezeichnet, dann wird xRx nicht einer Reihe von Reihen A und B gleich sein.*

In diesem Falle bekämen wir nämlich: $R = ySy$, wo y den von x verschiedenen der Buchstaben a und b bedeutete, während S einer Reihe von Reihen A und B gleich wäre. Hierdurch ist die Behauptung bewiesen.

Enthält eine Reihe von Reihen ab und ba zwei einander gleiche Unterreihen U, die einen einzigen Buchstaben a oder b gemeinsam hat, dann muß also die Anzahl der Buchstaben von U eine ungerade Zahl sein.

Satz 3. *Es bedeute R eine offene Zeichenreihe, in der jedes Zeichen ein a oder ein b ist, während je einander gleiche Unterreihen von R immer außerhalb einander liegen.*

Indem x einen beliebigen der Buchstaben a und b und y den anderen bezeichnet, erhält man aus R eine neue Reihe derselben Art, wenn man hier jedesmal statt a die Reihe $A = xy$ und statt b die Reihe $B = yx$ schreibt.

Ist mit anderen Worten die Reihe R, die wir durch $R[a, b]$ bezeichnen wollen, irreduktibel in Bezug auf die Buchstaben a und b, so werden die Reihen $R[ab, ba]$ und $R[ba, ab]$ auch irreduktibel in Bezug auf a und b.

Enthielte nämlich $R[A, B]$ oder $R[xy, yx]$ zwei einander gleiche Unterreihen U, die einen einzigen Buchstaben a oder b gemeinsam hätten, so würde U nach Satz 2 von einer ungeraden Anzahl Buchstaben gebildet.

$R[A, B]$ enthielte folglich dann entweder eine Unterreihe:

$$\underbrace{h\,k\,N\,h}_{U}\overbrace{h\,k\,N\,h}^{U}$$

oder eine Unterreihe:

$$\underbrace{k\,N\,h\,k}_{U}\overbrace{k\,N\,h\,k}^{U}$$

wo h und k beziehungsweise die Buchstaben a und b bezeichneten, während jedes N aus einer Reihe von den genannten Reihen A und B gebildet wäre.

In beiden Fällen enthielte dann $R[A, B]$ eine Unterreihe $hkNhkNhk$ und $R[a, b]$ also eine Unterreihe $\delta M\delta M\delta$, wo δ ein a oder ein b bedeutete, während M einer Reihe von Buchstaben a und b gleich wäre.

Da dies nach der Voraussetzung unmöglich, ist somit der Satz bewiesen.

Wie man sieht, muß der Satz auch gelten, wenn R eine einfach oder zweifach unendliche Zeichenreihe bedeutet.

Satz 4. *Bedeutet $R[a, b]$ eine geschlossene Zeichenreihe, in der jedes Zeichen ein a oder ein b ist, während $R[a, b]$ irreduktibel in Bezug auf a und b sein soll, dann werden die geschlossenen Reihen $R[ab, ba]$ und $R[ba, ab]$ auch in Bezug auf a und b irreduktibel.*

Diesen Satz wird man durch dasselbe Räsonnement wie Satz 3 beweisen können.

Bedeutet $R_0[a, b]$ eine geschlossene oder offene endliche Zeichenreihe, in der jedes Zeichen ein a oder ein b ist, während für jeden ganzen positiven Wert von p:

$$R_p[a, b] = R_{p-1}[ab, ba]$$

dann muß $R_k[a, b]$ für jeden ganzen positiven Wert von k in Bezug auf a und b irreduktibel sein, wenn dies der Fall für $R_0[a, b]$ ist.

Da z. B. a als eine offene oder geschlossene, in Bezug auf a und b irreduktible, Reihe betrachtet werden kann, existieren also solche irreduktible Reihen, bei denen die Anzahl der Buchstaben größer als eine beliebig gegebene Größe wird.

Satz 5. *Man kann jedenfalls eine einfach unendliche Zeichenreihe, in der jedes Zeichen ein a oder ein b ist, bilden, wo je einander gleiche Unterreihen überall außerhalb einander liegen und also keine gemeinsame Partie besitzen.*

Ist z. B. $S_0 = b$, während S_{k+1} für jeden ganzen, nicht negativen, Wert von k aus S_k gebildet ist, indem man hier z. B. statt jedes a die

Reihe ab und statt jedes b die Reihe ba geschrieben hat, dann bildet die einfach unendliche Reihe

$$(1) \ldots \qquad R = a\, S_0\, S_1\, S_2\, S_3 \ldots$$

eine Reihe der genannten Art.

Wird $R_r[a, b]$ für jeden ganzen, nicht negativen, Wert von r durch die Gleichungen

$$R_0[a, b] = a$$

$$R_{h+1}[a, b] = R_h[a, b]\, S_h = a\, S_0\, S_1\, S_2 \ldots S_h$$

definiert, wobei $h \gtreqless 0$, so erhält man nämlich

$$R_{r+1}[a, b] = R_r[ab, ba]$$

Diese Gleichung wird ja für $r = 0$ richtig sein. Wenn sie indessen für $r = h$ richtig wird, muß sie auch für $r = h + 1$ gelten. Denn:

$$R_{h+2}[a, b] = R_{h+1}[a, b]\, S_{h+1} = R_h[ab, ba]\, S_{h+1} = R_{h+1}[ab, ba]$$

Man erhält hier $S_h = R_h[b, a]$, oder

$$(2) \ldots \qquad R_{h+1}[a, b] = R_h[a, b]\, R_h[b, a]$$

Schreibt man $R[a, b]$ statt R, so wird

$$(3) \ldots \qquad R[ab, ba] = R[a, b]$$

Die Reihe R geht also, wenn man hier statt jedes a die Reihe ab und statt jedes b die Reihe ba schreibt, in sich selber über. R ist hierdurch eindeutig bestimmt.

Aus (3) folgt:

Satz 6. *Eine von Reihen $A = ab$ und Reihen $B = ba$ gebildete einfach unendliche Reihe*

$$(4) \ldots \qquad R = (ab)\,(ba)\,(ba)\,(ab)\,(ba)\,(ab)\,(ab)\,(ba) \ldots = \\ A \quad B \quad B \quad A \quad B \quad A \quad A \quad B \ldots$$

wo — für jeden Wert von p — die p'te der Reihen A und B einer Reihe A oder einer Reihe B gleich wird, je nachdem der p'te der Buchstaben a und b von R ein a oder ein b ist, muß in Bezug auf a und b irreduktibel sein. Je zwei einander gleiche Unterreihen dieser Reihe R liegen also überall außerhalb einander.

Für jede gerade, nicht negative, Zahl $2q$ wird $R_{2q}[a, b]$, mit Beibehaltung der früheren Bedeutung, symmetrisch. Das gilt ja für $q = 0$, während nach (2)

$$R_{2p+2}[a, b] = R_{2p+1}[ab, ba] = R_{2p}[abba, baab]$$

Hieraus ergibt sich:

Satz 7. *Ist T_h für jeden Wert von h dadurch definiert, daß $T\ S$ symmetrisch sein soll, so wird die zweifach unendliche Reihe*

$$(5)\ldots \qquad U = \ldots T_3 T_2 T_1 T_0\, a\, a\, S_0 S_1 S_2 S_3 \ldots$$

in Bezug auf a und b irreduktibel.

Bedeutet T_h^1 für jeden Wert von h die aus T_h erhaltene Reihe, wenn man hier statt jedes a die Reihe ab und statt jedes b die Reihe ba schreibt, so bildet auch

$$\ldots T_3^1 T_2^1 T_1^1 T_0^1\, ab\, a\, S_0 S_1 S_2 S_3 \ldots$$

eine in Bezug auf a und b zweifach unendliche irreduktible Reihe.

8. Es bedeute N eine beliebige, von Buchstaben a und Buchstaben b gebildete offene Reihe, die in Bezug auf a und b irreduktibel ist.

Ist N aus mindestens 5 Buchstaben zusammengesetzt, so enthält N eine der Reihen aa oder bb. Ist N folglich aus mindestens 9 Buchstaben gebildet, so enthält N zwei Reihen, von denen jede einer der Reihen aa oder bb gleich ist.

Bedeutete N hier eine nicht offene, sondern eine geschlossene Reihe von mindestens 4 Buchstaben, so enthielte sie eine der Reihen aa oder bb und folglich jedenfalls auch zwei Reihen, die beide einer Reihe aa oder einer Reihe bb gleich waren.

Es bezeichnen P eine von Buchstaben a und Buchstaben b gebildete Reihe und jede der Zeichen x, y, z und u ein a oder ein b.

Wird dann die offene Reihe $zxxPyyu$ irreduktibel in Bezug auf a und b, während P, die, wie hier vorausgesetzt ist, mindestens aus einem Zeichen gebildet ist, keine der Reihen aa oder bb enthält, dann müssen x und y verschieden sein, während $z = y$, $u = x$ und $P = yx$, oder $xPy = (xy)(\dot{x}\dot{y})$.

Wir erhalten somit folgende Sätze.

Satz 8. *Bedeutet in der Reihe $zxxPyyu$ jeder der Buchstaben x, y, z und u ein a oder ein b, während P eine beliebige aus Buchstaben a und Buchstaben b gebildete Reihe ist, so kann man die Reihe $zxxPyyu$, wenn sie in Bezug auf a und b irreduktibel ist, auf eine, und zwar nur auf eine einzige Weise ausschließlich aus Reihen $A = ab$ und Reihen $B = ba$ zusammensetzen.*

Schreibt man in der Reihe $zxxPyyu$ statt jeder der genannten Reihen A das Zeichen α und statt jeder der genannten Reihen B das Zeichen β, so bekommt man eine in Bezug auf α und β irreduktible Reihe.

Satz 9. *Jede von Buchstaben a und Buchstaben b gebildete zweifach unendliche Reihe oder geschlossene Zeichenreihe von mehr als drei Buchstaben, kann man, wenn die Reihe in Bezug auf a und b irreduktibel ist, auf eine einzige Weise ausschließlich von Reihen $A = ab$ und Reihen $B = ba$ zusammensetzen.*

Schreibt man in der erwähnten irreduktiblen, zweifach unendlichen oder geschlossenen Reihe statt jedes der genannten Reihen A das Zeichen α und statt jedes der genannten Reihen B das Zeichen β, so wird die auf diese Weise erhaltene neue Reihe irreduktibel in Bezug auf α und β.

Hieraus ergibt sich ferner:

Satz 10. *Bedeutet x einen beliebigen der Buchstaben a und b und y den anderen, während die Zeichenreihen $R_k[x, y]$ durch die Gleichungen*

$$R_0[x, y] = x \quad \text{und} \quad R_{h+1}[x, y] = R_h[xy, yx]$$

wo $h \gtreqless 0$, definiert sind, so kann man, indem k beliebig gegeben ist, jede von Buchstaben a und Buchstaben b gebildete zweifach unendliche Reihe, die in Bezug auf a und b irreduktibel ist, auf eine, und zwar nur auf eine einzige Weise ausschließlich aus Reihen $R_k[a, b]$ und Reihen $R_k[b, a]$ aufbauen.

Hat man von Buchstaben a und b eine geschlossene irreduktible Reihe mit mehr als $3 \cdot 2^{k-1}$ Zeichen, so kann man auch jede solche Reihe aus Reihen $R_k[a, b]$ und Reihen $R_k[b, a]$ bilden, und zwar nur auf eine einzige Weise.

Da man in dem Satze 10 k beliebig groß wählen kann, während $R_{h+1}[x, y] = R_h[x, y]\, R_h[y, x]$, so erhält man:

Satz 11. *Jede Unterreihe einer von Buchstaben a und b gebildeten, zweifach unendlichen Zeichenreihe, die in Bezug auf a und b irreduktibel ist, kommt in der unendlichen Reihe unendlich vielmal vor.*

Nach dem Satze 1 gibt es also unendlich viele von Buchstaben a und Buchstaben b gebildete, nicht kongruente, zweifach unendliche Reihen, die in Bezug auf a und b irreduktibel sind.

Aus dem Satze 10 ergibt sich außerdem:

Satz 12. *Es bedeuten $N[a, b]\, P[a, b]$ und $N[a, b]\, Q[a, b]$ zwei von Buchstaben a und von Buchstaben b gebildete, zweifach unendliche Reihen, in denen $N[a, b]$ eine einfach unendliche Reihe, die nach rechts endet, während $P[a, b]$ sowohl als $Q[a, b]$ eine einfach unendliche Reihe, die nach links endet, bezeichnet. Sind dann beide Reihen NP und NQ, wo P und Q mit verschiedenen Buchstaben von links anfangen, irreduktibel in Bezug auf a und b, so wird $Q[a, b] = P[b, a]$, während entweder $N[a, b] = N[ab, ba]$*

oder $N[a, b] = N[ba, ab]$. *Gleichzeitig bekommt man entweder* $P[a, b] = P[ab, ba]$ *oder* $P[a, b] = P[ba, ab]$.

Für jeden beliebig gegebenen ganzen, nicht negativen Wert von k muß nämlich die Reihe N nach rechts und jede der Reihen P und Q nach links auf eine der Reihen $R_k[a, b]$ oder $R_k[b, a]$ enden.

Bedeutet $N[a, b]\,M[a, b]$ eine von Buchstaben a und Buchstaben b gebildete zweifach unendliche Reihe, die in Bezug auf a und b irreduktibel ist, während $N[a, b]$ eine einfach unendliche Reihe, die nach rechts, und $M[a, b)$ eine unendliche Reihe, die nach links endet, bezeichnen, so wird, wenn z. B. $N[a, b]$ keiner der Reihen $N[ab, ba]$ oder $N[ba, ab]$ gleich ist, N sowohl als M für die Reihe NM charakteristisch sein.

N sowohl als M lassen sich dann nur auf eine einzige Weise in eine in Bezug auf a und b irreduktible, zweifach unendliche Reihe verlängern.

Aus Satz 9 erhält man:

Satz 13. *Es seien*

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots$$
$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ \ldots$$
$$R_1,\ R_2,\ R_3,\ \ldots$$

drei unendliche Serien von geschlossenen Zeichenreihen, wo $P_1 = aab$, $Q_1 = bba$ *und* $R_1 = ab$, *während* P_{m+1}, Q_{m+1} *und* R_{m+1} *für jede ganze Zahl* $m \geqq 1$ *aus beziehungsweise* P_m, Q_m *und* R_m *gebildet sind, indem man hier statt jedes* a *die Reihe* $A = ab$ *und statt jedes* b *die Reihe* $B = ba$ *geschrieben hat.*

Jede von Buchstaben a *und Buchstaben* b *gebildete geschlossene Zeichenreihe, die in Bezug auf* a *und* b *irreduktibel ist und mindestens 2 Zeichen enthält, muß dann immer einer der genannten Reihen* P, Q *oder* R *gleich sein.*

Ist nämlich T eine solche beliebige geschlossene, irreduktible Reihe von mehr als 3 Buchstaben, so ist sie nach dem Satze 9 aus Reihen $A = ab$ und Reihen $B = ba$ gebildet. Schreibt man ferner in T statt jeder Reihe A ein a und statt jeder Reihe B ein b, so erhält man aus T eine neue geschlossene irreduktible Reihe U, in der die Anzahl der Buchstaben nur der Hälfte der Anzahl der Buchstaben von T gleich ist. Behandelt man U wie T und fährt auf diese Weise fort, so erhält man ja zuletzt eine der irreduktiblen Reihen ab, aab oder bba.

Hierdurch ist der Satz bewiesen.

R_k geht durch Vertauschen von a und b in sich selbst, und P_k und Q ineinander über.

Jedes R und jedes P_{2r} und Q_{2r} werden symmetrisch.

Satz 14. *Die Anzahl der Zeichen einer geschlossenen Zeichenreihe, in der jedes Zeichen ein a oder ein b ist, muß, wenn die Reihe in Bezug auf a und b irreduktibel sein soll, einer der Zahlen 2^m oder 3.2^m, wo m eine gewisse ganze Zahl bedeutet, gleich sein.*

Enthält die Reihe mehr als 3 Zeichen, so enthält sie gleich viele Buchstaben a wie Buchstaben b.

Bedeutet U eine von Buchstaben a und Buchstaben b gebildete und in Bezug auf a und b irreduktible offene Reihe von mehr als 10 Zeichen, dann kann man aus U, indem man hier an jedem Ende den äußersten, oder die beiden äußersten, oder indem man gar keinen Buchstaben entfernt, eine Reihe W herleiten, die aus Reihen ab und Reihen ba zusammengesetzt ist.

U hat hier nämlich die Form $Cyxx\,Nzzu\,D$, wobei jedes x, y, z und u ein a oder ein b bedeutet, während $x\,Nz$ von Reihen ab und Reihen ba gebildet ist, derart daß gleichzeitig C entweder ganz fehlt oder einer der Reihen x, y, yx, xx oder yyx gleich ist, während ferner D entweder ganz fehlt oder eine der Reihen z, u, zu, zz oder zuu bezeichnet. x und y sind verschieden und ebenso auch z und u.

Hieraus folgt:

Satz 15. *Bedeutet N eine von Buchstaben a und b gebildete und in Bezug auf a und b irreduktible offene Reihe von n Buchstaben, wo n beliebig ist, während N nach beiden Richtungen hin mit wenigstens 8n Buchstaben, von denen je einer a oder b ist, verlängert werden kann, ohne in Bezug auf a und b reduktibel zu werden, dann wird N in jeder aus Buchstaben a und b gebildeten und in Bezug auf a und b irreduktiblen Reihe M, die aus mindestens 26n Buchstaben besteht, enthalten sein.*

Wenn nämlich eine solche Reihe N existierte, könnte man, wenn $2^{k-1} \leqq n < 2^k$, eine Serie von Reihen

$$S_0[a, b] = P_0[a, b]\, N_0[a, b]\, Q_0[a, b]$$
$$S_1[a, b] = P_1[a, b]\, N_1[a, b]\, Q_1[a, b]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_k[a, b] = P_k[a, b]\, N_k[a, b]\, Q_k[a, b]$$

bilden, wo $N_0[a, b] = N$, während erstens jedes P, N, Q und S eine derartige aus Buchstaben a und Buchstaben b gebildete und in Bezug auf a und b irreduktible Reihe bezeichnet, daß

$$r_0 \geqq 8n$$
$$n_0 = n$$

$$r_{h+1} \geqq \frac{r_h - 3}{2} > \frac{r_0}{2^{h+1}} - 3$$

$$\frac{n}{2^{h+1}} \leqq \frac{n_h}{2} \leqq n_{h+1} \leqq \frac{n_h + 2}{2} < \frac{n}{2^{h+1}} + 2$$

$$h = 0, 1, 2, \ldots, k-1$$

wo r_h die Anzahl der Zeichen von P_h und Q_h und n_h die Anzahl der Zeichen von N_h bezeichnen. Zweitens kann man S, P, N und Q so wählen, daß $N_h[a, b]$ in $N_{h+1}[ab, ba]$ enthalten ist.

Da $r_0 \geqq 8n \geqq 8 \cdot 2^{k-1}$, wird nämlich $r_{k-1} > \frac{r_0}{2^{k-1}} - 3 > 5$, und S_{k-1} muß folglich von mehr als 10 Zeichen gebildet sein.

Da ferner

$$\frac{n}{2^k} \leqq n_k \leqq \frac{n}{2^k} + 2$$

so enthält N_k höchstens zwei Zeichen und wird einer der Reihen a, b, ab, ba, aa oder bb gleich.

Man kann endlich aus Buchstaben a und Buchstaben b gebildete und in Bezug auf a und b irreduktible Reihen $M_0[a, b]$, $M_1[a, b]$, ... $M_k[a, b]$ konstruieren, bei denen $M_0[a, b] = M$, während $M_{h+1}[ab, ba]$ in $M_h[a, b]$ enthalten ist.

Indem m_h die Anzahl der Zeichen von $M_h[a, b]$ bedeutet, kann man die Reihen M außerdem so wählen, daß

$$m_{h+1} \geqq \frac{m_h}{2} - 2 > \frac{m_0}{2^{h+1}} - 4$$

Da

$$m_0 \geqq 26n \geqq 26 \cdot 2^{k-1} = 13 \cdot 2^k$$

oder

$$m_k \geqq \frac{m_0}{2^k} - 4 \geqq 9$$

so enthält also $M_k[a, b]$ wenigstens 9 Zeichen und enthält also auch $N_k[a, b]$. Für jeden Wert von h bildet folglich $N_h[a, b]$ eine Unterreihe von $M_h[a, b]$.

Ist nämlich $N_{\delta+1}[a, b]$ eine Unterreihe von $M_{\delta+1}[a, b]$, so enthält $M_\delta[a, b]$ die Reihe $M_{\delta+1}[ab, ba]$, und diese Reihe enthält wieder die Reihe $N_{\delta+1}[ab, ba]$, welch letztere die Reihe $N_\delta[a, b]$ enthalten muß. N muß also in M enthalten sein.

Wir bemerken, daß N nach beiden Richtungen zu einer zweifach unendlichen, irreduktiblen Reihe verlängert werden kann.

Es existieren nicht $26n$ verschiedene von Buchstaben a und b gebildete und in Bezug auf a und b irreduktible Reihen von n Zeichen, wenn jede Reihe nach beiden Richtungen zu einer zweifach unendlichen irreduktiblen Reihe verlängert werden kann.

Jede Reihe der genannten Art wird ja in einer Reihe von $26n$ Zeichen enthalten sein.

9. **Satz 16.** *Es seien*

$$R_0 = a\,, \quad S_0 = b$$

während R_{p+1} und S_{p+1}, für jedes $p \gtreqless 0$, aus beziehungsweise R_p und S_p, indem man hier statt jedes a die Reihe ab und statt jedes b die Reihe ba geschrieben hat, gebildet sind. Bedeuten dann A und B zwei aus Buchstaben a und Buchstaben b derart gebildete Reihen, daß jede von Buchstaben a und Buchstaben b gebildete und in Bezug auf a und b irreduktible Reihe, wenn man hier statt jedes a die Reihe A und statt jedes b die Reihe B schreibt, in eine neue Reihe derselben Art übergeht, dann existiert eine ganze Zahl q für die entweder

$$A = R_q \text{ und } B = S_q$$

oder

$$A = S_q \text{ und } B = R_q$$

In dem Falle, daß weder A noch B nur aus einem einzigen Zeichen besteht, muß, wie wir zunächst zeigen werden, die Anzahl der Zeichen von A sowohl wie die Anzahl der Zeichen von B eine gerade Zahl sein.

Keine der Reihen A oder B kann aus 3 Zeichen gebildet sein. Wäre nämlich z. B. $A = aab$ oder $A = baa$, so enthielte die Reihe $BAAB$ entweder die Reihe $b(aab)(aab)$ oder die Reihe $(baa)(baa)b$. Wäre endlich z. B. $A = aba$, so würde eine der Reihen $BBAABB$ oder BAB reduktibel werden. Enthält eine der Reihen A und B mehr als 4 Zeichen, so ist die Anzahl der Zeichen der betreffenden Reihe eine gerade Zahl. Enthält nämlich z. B. A mehr als 4 Zeichen, so hat A die Form $Pxx Q$, wo x ein a oder ein b bedeutet, während P oder Q beliebig fehlen können. Aber in der Reihe $BAAB = B(Pxx Q)(Pxx Q)B$ enthält $xQPx$, und also auch A, eine gerade Anzahl von Zeichen.

Enthält endlich die eine der Reihen A und B nur ein einziges Zeichen, so muß die andere dieser Reihen auch von einem einzigen Zeichen gebildet sein.

Wäre nämlich z. B. $A = a$, so hätte B eine der Formen b, bb oder bPb, wo P wenigstens ein Zeichen enthielte. Sonst würde ja $BAAB$ reduktibel sein. Ferner wird nicht $B = bb$, da hier $BB = bbbb$.

Endlich kann nicht $B = bPb$ sein, da sonst $bPba$ in der Reihe $BBAAB = bPbbPbaabPb$ in diesem Falle eine gerade, und B also eine ungerade Anzahl Zeichen enthalten würde.

Keine der Reihen A oder B kann die Form xx haben, wobei x ein a oder ein b bedeutet. Denn AA und BB sollen ja irreduktible Reihen sein.

Enthält A und B mehr als ein einziges Zeichen, so kann man A sowohl wie B ausschließlich aus den Reihen ab und ba zusammensetzen.

Hat nämlich eine der Reihen A und B die Form xPx, wo x ein a oder ein b bezeichnet, so enthält P, wenn P nicht aa oder bb gleich ist, da AA und BB irreduktibel sind, wenigstens 4 Zeichen. In beiden Fällen hätte P die Form $NyyM$, wo y einem a oder einem b gleich ist, während N und M auch fehlen können.

In der Reihe $(xPx)(xPx) = xNy[yMx][xNy]yMx$ sind yMx und xNy, und also auch xPx aus Reihen ab und ba aufgebaut.

Hat endlich A die Form xPy, wo x und y verschieden sind und a und b bedeuten, dann muß B die Form yQx haben. Sonst würden ja $BAAB$ reduktibel.

In der Reihe

$$BABA = yQx[xPy]yQx]xPy$$

müssen indessen xPy und yQx, und also auch A und B, aus Reihen ab und ba gebildet sein.

Schreibt man nun in A und B, wenn jedes von ihnen mehr als ein Zeichen enthält, statt jeder Reihe ab ein x und statt jeder Reihe ba ein y, wo x den einen und y den anderen der Buchstaben a und b bedeuten, so erhalten auch die aus A und B auf diese Weise gebildeten neuen Reihen A' und B' die früher von A und B vorausgesetzte Eigenschaft. D. h.:

Bedeutet $U[a, b]$ eine von Buchstaben a und b gebildete und in Bezug auf a und b irreduktible Reihe, so bildet $U[A', B']$ eine Reihe von derselben Eigenschaft.

Die Anzahl der Zeichen von A' und B' ist aber gleich der Hälfte der Anzahl der Zeichen von A und B. Behandelt man folglich A' und B' auf dieselbe Weise wie A und B und fährt man auf diese Weise fort, so erhält man zuletzt zwei Reihen A_c und B_c, die dieselbe Eigenschaft wie A und B besitzen, während A_c oder B_c nur aus einem einzigen Zeichen bestehen. Aber dann muß ja A_c sowohl wie B_c aus einem einzigen Zeichen gebildet sein. Da folglich A und B aus gleich vielen Buchstaben a und b zusammengesetzt sind, ist unser Satz hierdurch bewiesen.

10. Wir werden nun einige Sätze über die Verzweigung der Fig. 2 entwickeln.

Es bedeuten RP und RQ zwei aus Buchstaben a und Buchstaben b gebildete Reihen, die in Bezug auf a und b irreduktibel sind. P und Q fangen von links mit verschiedenen Buchstaben an.

Ferner sollen

$$R = hkkR'$$
$$Q = Q'xxy$$
$$P = P'zzu$$

wo jeder der Buchstaben h, k, x, y, z und u ein a oder ein b bedeutet.

R, P und Q können dann aus Reihen ab und ba zusammengesetzt werden.

Enthält nämlich R wenigstens 4 und P sowohl als Q wenigstens 2 Zeichen, während $R = hkkSr$, wo h, k und r ein a oder ein b ist, dann hat RP oder RQ die Form $hkkSrrsT$, wo s ein a oder ein b bezeichnet. R kann also dann aus Reihen ab und ba zusammengesetzt werden.

Schreibt man in RP und RQ statt jeder Reihe ab ein x und statt jeder Reihe ba ein y, wo x den einen und y den andern der Buchstaben a und b bedeuten, so erhält man zwei neue irreduktible Reihen R_1P_1 und R_1Q_1.

Bedeuten folglich RP und RQ zwei aus Buchstaben a und b gebildete zweifach unendliche Reihen, die in Bezug auf a und b irreduktibel sind, während R eine einfach unendliche Reihe bedeutet, die nach rechts endet, und P und Q zwei einfach unendliche Reihen, die nach links enden, dann sind P, Q und R durch ihre Endbuchstaben völlig definiert.

Es bedeuten RU und RP zwei aus Buchstaben a und b gebildete Reihen, die in Bezug auf a und b irreduktibel sind. Wenn R z. B. von links mit a anfängt, bedeutet U eine derartige nach rechts gehende, einfach unendliche Reihe, daß die Reihe $W = RU$ unverändert bleibt, wenn man hier statt jedes a die Reihe ab und statt jedes b die Reihe ba schreibt.

Wenn dann ferner P und U von links mit verschiedenen Buchstaben anfangen, während P wenigstens $m - 2$ Zeichen enthält, wobei m die Anzahl der Zeichen von R bedeutet, so wird m einer Potenz von 2 gleich.

Man sieht ohne weiteres ein, daß der Satz, selbst wenn P nur ein einziges Zeichen enthält, richtig wird für $m \gtreqless 4$. Ist $m > 4$, so muß R aus Reihen ab und ba gebildet sein. Dasselbe gilt auch für eine Reihe Q, die aus P gebildet ist, wenn man hier keinen oder den letzten, bzw. die zwei letzten rechten Buchstaben wegläßt.

Bedeuten nun R_1, U_1 und P_1 die Reihen, die aus beziehungsweise R, U und Q gebildet sind, indem man hier statt jeder Reihe ab den Buchstaben a und statt jeder Reihe ba den Buchstaben b schreibt, dann bekommt man die neuen irreduktiblen Reihen R_1U_1 und R_1P_1, wo R_1U_1

mit $W = RU$ identisch wird, während P_1 und U_1 mit verschiedenen Buchstaben von links anfangen.

Da P_1 wenigstens $\frac{m}{2} - 2$ Buchstaben, wo $\frac{m}{2}$ die Anzahl der Buchstaben von R_1 ist, enthält, ist hierdurch unsere Behauptung bewiesen.

Bedeutet U eine solche von Buchstaben a und b gebildete Reihe von mehr als 4 Zeichen, daß die Reihe $pUUq$, wo p sowohl wie q ein a oder ein b ist, in Bezug auf a und b irreduktibel wird, so kann man U ausschließlich aus Reihen ab und Reihen ba zusammensetzen.

Indem x den einen und y den anderen der Buchstaben a und b bezeichnen, kann U weder nach links, noch nach rechts auf xx enden. Endete U z. B. nach links auf xx, so könnte U erstens nicht nach rechts auf x enden, da UU irreduktibel sein soll. Ist aber hier zweitens $U = xxPy$, so wird ja die Reihe $yUU = yxxPyxxPy$ reduktibel.

U kann auch nicht von links mit $xyxx$ anfangen. Denn sonst bekämen wir $U = xyxxP$, wo P, da UU irreduktibel sein soll, nicht auf x, sondern auf y und also auf yy nach rechts enden muß. Aber dann würde $UUx = xyxxPxyxxPx$ reduktibel.

Wir erhalten folglich entweder

$$UU = (xyyP)(xyyP)$$

oder

$$UU = (xyxyyP)(xyxyyP)$$

Im ersteren Falle kann man die Reihe $yPxy$ und im letzteren die Reihe $yPxyxy$ aus Reihen ab und Reihen ba bilden.

Hierdurch ist die Behauptung bewiesen.

Bedeutet

$$\ldots x_6\, x_5\, x_4\, x_3\, x_2\, x_1 = R$$

eine einfach unendliche, nach links gehende Reihe, in der jedes x ein a oder ein b bezeichnet, während die Reihe in Bezug auf a und b irreduktibel ist, dann kann nicht jedes x das rechte Endzeichen einer Unterreihe UU von R bilden. Es gibt mit anderen Worten solche ganze Zahlen p, daß die einfach unendliche Reihe

$$\ldots x_{p+2}\, x_{p+1}\, x_p$$

nach rechts mit zwei verschiedenen von Buchstaben a und b gebildeten Reihen verlängert werden kann, ohne dadurch reduktibel zu werden.

R enthält nämlich unendlich viele Reihen $baabbaba$, kann jedoch nicht eine Unterreihe UU, die auf $baabbab$ nach rechts endet, besitzen.

KAP. III.

Zeichenreihen aus drei Arten von Zeichen.

11. Eine offene Zeichenreihe R, in der jedes Zeichen ein a, ein b oder ein c ist, während überall je zwei einander gleiche Unterreihen dieser Reihe durch wenigstens einen Buchstaben getrennt sind, heifst dann, und zwar nur dann, in Bezug auf a, b und c irreduktibel. Sonst wird die Reihe reduktibel genannt.

Enthält eine Zeichenreihe S zwei einander gleiche Unterreihen, die eine gemeinsame Partie besitzen, so enthält S auch zwei einander gleiche Unterreihen, die außerhalb einander liegen und unmittelbar auf einander folgen.

Die Reihe R wird also dann, aber auch nur dann, wenn sie eine Unterreihe von der Form UU enthält, in Bezug auf a, b und c reduktibel genannt; sonst wird sie demnach irreduktibel.

Eine aus Buchstaben a, Buchstaben b und Buchstaben c gebildete geschlossene Reihe von r Zeichen, heifst dann, und zwar nur dann, irreduktibel in Bezug auf a, b und c, wenn der Ring keine in Bezug auf a, b und c reduktible offene Reihe mit r oder weniger Zeichen enthält.

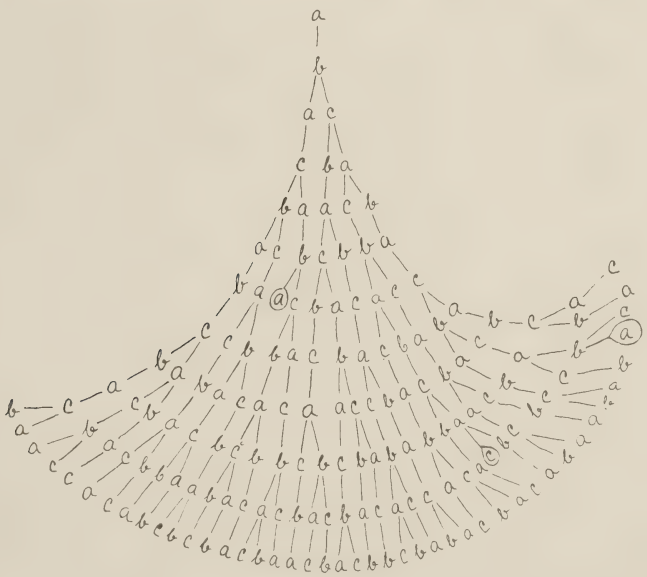


Fig. 3.

Vorstehende Fig. 3 enthält alle von Buchstaben a, b und c gebildeten und in Bezug auf a, b und c irreduktiblen offenen Reihen, die mit a anfangen und höchstens 12 Zeichen enthalten. Wenn eine dieser Reihen an dem freien Ende nicht verlängert werden kann, ohne reduktibel zu werden, ist dies durch einen geschlossenen Strich angedeutet.

Satz 17. *Es bedeuten P, Q und R drei offene Zeichenreihen, in denen jedes Zeichen ein a oder ein b oder ein c ist. P, Q und R sind außerdem so beschaffen, daß alle in Bezug auf P, Q und R irreduktiblen Reihen PQR, PRQ, QRP, QPR, RPQ, RQP, PQP, PRP, QRQ, QPQ, RPR, RQR auch in Bezug auf a, b und c irreduktibel werden. Schließlich soll keine der Reihen P, Q und R einer Unterreihe einer der anderen Reihen gleich sein. Schreibt man dann in einer beliebigen von Buchstaben a, von Buchstaben b und von Buchstaben c gebildeten geschlossenen oder nicht geschlossenen Reihe S, die in Bezug auf a, b und c irreduktibel ist, statt jedes a die Reihe P, statt jedes b die Reihe Q und statt jedes c die Reihe R, so wird die auf diese Weise gebildete Reihe auch in Bezug auf a, b und c irreduktibel.*

Schreibt man $S[a, b, c]$ statt S, so bildet also $S[P, Q, R]$ eine in Bezug auf a, b und c irreduktible Reihe.

Um dies zu beweisen, machen wir zunächst folgende Bemerkung:

Enthält eine beliebige offene Reihe

$$U_1 U_2 U_3 \ldots U_m$$

wo jedes U eine der Reihen P, Q oder R bedeutet, eine Unterreihe T, die einer der Reihen P, Q oder R gleich ist, dann muß T mit einer der Reihen U identisch sein.

Wäre das nämlich nicht der Fall, dann würde der genannten Voraussetzung zufolge T eine Unterreihe einer Reihe $U_k U_{k+1}$ bilden, wo T weder ganz in U_k noch in U_{k+1} enthalten wäre.

Aber in diesem Falle würden ja die beiden Reihen $U_k T$ und $T U_{k+1}$ reduktibel, was indessen, wenn U_k und U_{k+1} verschieden sind, gegen unsere Voraussetzung streitet. Wäre aber $U_k = U_{k+1} = T$, so könnte T nicht irreduktibel sein.

Enthielte nun $S[P, Q, R]$ in a, b und c eine Unterreihe DD, so bekämen wir also

$$DD = \alpha N_1 \ldots N_f M N_1 \ldots N_f \beta$$

wo $f \geqq 1$, während M, welche Reihe $\beta\alpha$ gleich ist, und jedes N eine der Reihen P, Q oder R bedeutete.

$S[P, Q, R]$ enthielte dann folglich auch eine Unterreihe

$$\gamma D D \delta = \gamma \alpha N_1 \ldots N_f \beta \alpha N_1 \ldots N_f \beta \delta = F N_1 \ldots N_f M N_1 \ldots N_f G$$

wo jede der Reihen F und G einer der Reihen P, Q oder R bezeichnete.

Da $FMG = \gamma[\alpha\beta][\alpha\beta]\delta$ in Bezug auf a, b und c reduktibel ist, muß M einer der Reihen F oder G gleich sein.

Enthielte also $S[P, Q, R]$ eine Unterreihe DD, so enthielte sie entweder auch eine Reihe

$$[MN_1 \ldots N_f][MN_1 \ldots N_f]$$

oder eine Reihe

$$[N_1 \ldots N_f M]\, N_1 \ldots N_f M]$$

was, da $S[a, b, c]$ irreduktibel ist, unmöglich der Fall sein kann.

Unser Satz ist somit bewiesen.

Wir wollen versuchen, Reihen P, Q und R mit den erwähnten Eigenschaften zu finden.

Jede aus Buchstaben a, b und c gebildete offene Reihe S, die in Bezug auf a, b und c irreduktibel ist, mit a anfängt und nicht mit a endet und wenigstens zwei Zeichen enthält, kann aus Reihen A, B, C, D, E und Reihen F zusammengesetzt werden, wo

$$A = ab, \quad C = abc, \quad E = abcb$$
$$B = ac, \quad D = acb, \quad F = acbc$$

Bedeutet hier S eine zweifach unendliche oder eine geschlossene irreduktible Reihe mit wenigstens drei Zeichen, so gilt dasselbe.

Die Reihen $AC, AE, BD, BF, CE, DF, CBa, DAa, EAa, EDa, FBa, FCa$ sind sämtlich reduktibel. Ebenso die Reihen ADB, BCA, CFD, DEC.

Die 18 Reihen im nachfolgenden Schema

$$A \begin{cases} B \\ D \\ F \end{cases} \qquad B \begin{cases} A \\ C \\ E \end{cases} \qquad C \begin{cases} A \\ D \\ F \end{cases}$$

$$D \begin{cases} B \\ C \\ E \end{cases} \qquad E \begin{cases} B \\ C \\ F \end{cases} \qquad F \begin{cases} A \\ D \\ E \end{cases}$$

sind dagegen sämtlich irreduktibel.

In einer z. B. zweifach unendlichen irreduktiblen Reihe kommen ABA und BAB nicht vor. Die Reihen $AFA, FAF, BEB, EBE, CDC, DCD$ treten hier immer als Unterreihen von beziehungsweise den Reihen $BAFAB$, $CFAFD, ABEBA, DEBEC, BCDCA, ADCDB$ auf.

Schreibt man

$$P = CA = abcab$$
$$Q = BE = acabcb$$
$$R = FD = acbcacb$$

oder

$$P = AD = abacb$$
$$Q = EB = abcbac$$
$$R = CF = abcacbc$$

so erhalten die hier gebildeten Reihen, wie sofort zu sehen ist, die oben genannten Eigenschaften.

Auf Grund dieser Bemerkung kann man nach Satz 17 aus Buchstaben a, b und c Zeichenreihen mit beliebig vielen Zeichen und unendliche Zeichenreihen, in denen je zwei einander gleiche Unterreihen durch wenigstens ein Zeichen getrennt sind, konstruieren.

Satz 18. *In einer aus Reihen P, Q und R, wo z. B.*

$$P = abcab$$
$$Q = acabcb$$
$$R = acbcacb$$

gebildeten einfach unendlichen Zeichenreihe, z. B.

$$(abcab)(acabcb)(acbcacb)(abcab)(acabcb)(abcab)\ldots$$

wo die n'te dieser Reihen P, Q und R für jeden Wert von n z. B. eine Reihe P, oder eine Reihe Q oder eine Reihe R wird, je nachdem der n'te der Buchstaben a, b und c ein a, ein b oder ein c ist, sind überall je zwei einander gleiche Unterreihen durch wenigstens ein Zeichen getrennt.

Wird die unendliche Reihe durch $S[a, b, c]$ bezeichnet, so erhält man

$$S[P, Q, R] = S[a, b, c]$$

Irreduktible Reihen sind, wie sich zeigen wird, durch die Forderung, daß sie nicht gewisse Unterreihen enthalten sollen, oft im wesentlichen vollständig definiert.

Wir machen hier folgende Bemerkung: Eine aus Buchstaben a, b und c gebildete Reihe, die in Bezug auf a, b und c irreduktibel ist und also keine Unterreihe von der Form UU besitzt, enthält, wenn die Reihe aus mehr als 3 Zeichen gebildet ist, jeden der Buchstaben a, b und c.

Besteht die Reihe aus mehr als 13 Zeichen, so enthält sie jede der Reihen: ab, ac, ba, bc, ca und cb. Setzt sie sich endlich aus mehr als 30 Zeichen zusammen, so muß sie jede der Reihen: abc, acb, bca, bac, cab und cba enthalten.

12. Wir wollen nun irreduktible Reihen, die nur von 4 der 6 Arten von Reihen A, B, C, D, E und F in (1) zusammengesetzt sind, näher untersuchen.

Jede der betreffenden Reihen soll also keine der zwei Reihen einer der 15 nachstehenden Reihenpaare enthalten:

$$\left.\begin{array}{lll} 1) \ldots aba,\ aca & 6) \ldots aca,\ abca & 10) \ldots abca,\ acba \\ 2) \ldots aba,\ abca & 7) \ldots aca,\ acba & 11) \ldots abca,\ abcba \\ 3) \ldots aba,\ acba & 8) \ldots aca,\ abcba & 12) \ldots abca,\ acbca \\ 4) \ldots aba,\ abcba & 9) \ldots aca,\ acbca & \\ 5) \ldots aba,\ acbca & & \\ 13) \ldots acba,\ abcba & 15) \ldots abcba,\ acbca & \\ 14) \ldots acba,\ acbca & & \end{array}\right\} \ldots (S)$$

Da die Reihenpaare (6), (7), (8), (9), (13) und (14) durch Vertauschen von b und c beziehungsweise in die Reihenpaare (3), (2), (5), (4), (12) und (11) übergehen, wollen wir von diesen ersten 6 Reihenpaaren absehen.

In einer irreduktiblen Reihe P von mehr als 32 Zeichen können die beiden Reihen

$$abca \text{ und } abcba$$

des Falles (11) nicht gleichzeitig fehlen.

Die Reihe von den ersten 31 linken Zeichen von P enthält ja die Reihe abc, nach der nach rechts entweder der Buchstabe a oder die Reihe ba folgen mufs.

In dieselben Weise wird es klar, dafs die beiden Reihen

$$abca \text{ und } acbca$$

des Falles (12) nicht gleichzeitig in P fehlen können.

In einer irreduktiblen Reihe Q, die jedenfalls 60 Zeichen enthält, können nicht gleichzeitig die beiden Reihen

$$aba \text{ und } abca$$

des Falles (2) fehlen. Dasselbe gilt auch für die beiden Reihen

$$aba \text{ und } acba$$

des Falles (3).

Endlich können in einer irreduktiblen Reihe R von mehr als 47 Zeichen die beiden Reihen

$$aba \text{ und } abcba$$

des Falles (4) nicht gleichzeitig fehlen. Die Reihe der ersten 31 linken Zeichen von T enthält nämlich die Reihe abc, während die Reihe der 16 nach rechts folgenden Zeichen eine der Reihen aba oder $abcba$ enthalten mufs.

Wir brauchen somit nur die 4 Fälle (1), (5), (10) und (15) zu betrachten.

Enthält eine in Bezug auf a, b und c irreduktible Reihe S keine der Reihen $abca$ oder $acba$ des Falles (10), so enthält sie auch keine Unterreihe $\alpha bab\beta$ oder $\gamma cac\delta$, wo jede der Reihen α, β, γ und δ sich aus wenigstens 3 Zeichen zusammensetzt.

Enthielte umgekehrt die Reihe S keine der Reihen bab oder cac, so würde sie auch keine Unterreihe $\alpha abca\beta$ oder $\gamma acba\delta$ enthalten, wo jedes α, β, γ und δ ein a, ein b oder ein c bedeutete.

Da die Reihen bab und $bcacb$ durch Vertauschen von a und b in die Reihen des Falles (5) übergehen, wollen wir auch von diesem Falle absehen.

Die 15 Fälle sind hierdurch auf drei zurückgeführt.

Wir beschränken uns also auf die Untersuchung der von Buchstaben a, Buchstaben b und Buchstaben c gebildeten und in Bezug auf a, b und c irreduktiblen Reihen, wo entweder die zwei Reihen

$$aca \text{ und } bcb \quad \ldots \text{ (I)}$$

oder die zwei Reihen

$$aba \text{ und } aca \quad \ldots \text{ (II)}$$

oder die zwei Reihen

$$aba \text{ und } bab \quad \ldots \text{ (III)}$$

ganz fehlen.

Erster Fall.

aca und *bcb* fehlen.

13. Jede aus Buchstaben a, b und c gebildete Reihe R, die in Bezug auf a, b und c irreduktibel ist, und also keine Unterreihe von der Form UU besitzt, kann durch Einschaltung von Buchstaben c in eine aus Buchstaben a und b zusammengesetzte periodische Reihe

$$\ldots ababababa \ldots$$

wo die Reihen aa und bb nicht vorkommen, gebildet werden.

Baut sich R aus mehr als 10 Zeichen auf, so enthält diese Reihe eine der Reihen $caba$ oder $cbab$.

Wenn p den einen und q den andern der Buchstaben a und b bedeuten, erhält man die nebenstehende Verzweigung:

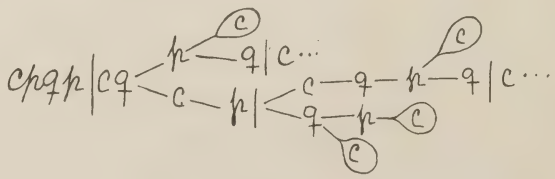


Fig. 4.

Bedeutet R eine zweifach unendliche Reihe oder eine geschlossene Reihe von wenigstens 12 Zeichen, so kann man also R aus Reihen

$$\begin{aligned} caba &= x \\ cbab &= y \\ cacb &= z \\ cbca &= u \end{aligned}$$

zusammensetzen.

Da hier die Reihen xz, ux, yu, zy, zu und uz reduktibel sind, erhält man die Verzweigung

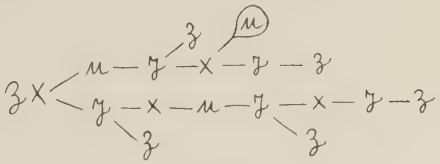


Fig. 5.

Jede von Buchstaben a, Buchstaben b und Buchstaben c gebildete geschlossene Reihe von wenigstens 32 Zeichen sowie jede zweifach unendliche Reihe, die keine der Reihen aca und bcb und keine Reihe von der Form UU enthält, kann also z. B. aus Reihen

$$\begin{aligned} z = cacb &= A \\ xy = caba\,cbab &= C \\ xuy = caba\,cbca\,cbab &= B \end{aligned}$$

gebildet werden.

Satz. Schreibt man folglich in der genannten Reihe, die wir durch $R[A, B, C]$ bezeichnen können, statt jeder Reihe A den Buchstaben α, statt jeder Reihe B den Buchstaben β und statt jeder Reihe C den Buchstaben γ, so wird die erhaltene Reihe $R[\alpha, \beta, \gamma]$ irreduktibel in Bezug auf α, β und γ und enthält keine der Reihen $\alpha\gamma\alpha$ und $\beta\gamma\beta$.

$R[A, B, C]$ enthält nämlich keine der Reihen ACA und BCB. Denn:

$$\begin{aligned} yACAx &= [yzx][yzx] \\ BCB &= xu[yx][yx]uy. \end{aligned}$$

Die Reihe $R[a, b, c]$ erhält somit denselben Charakter wie $R[A, B, C]$.

Enthält eine beliebige Reihe R von Reihen A, Reihen B und Reihen C eine Unterreihe D, die einer der Reihen A, B oder C gleich ist, dann muß D mit einer der genannten Reihe A, B oder C von R identisch sein.

Keine der Reihen A, B oder C bildet nämlich eine Unterreihe einer der anderen dieser Reihen, während AB, AC, BC, BA, CA und CB irreduktibel sind.

Satz 19. *Schreibt man in einer aus Buchstaben a, b und c gebildeten Reihe $R[a, b, c]$, die in Bezug auf a, b und c irreduktibel ist und keine der Reihen aca una bcb enthält, statt jedes a die Reihe A, statt jedes b die Reihe B und statt jedes c die Reihe C, dann wird die auf diese Weise gebildete Reihe $R[A, B, C]$ auch in Bezug auf a, b und c irreduktibel.*

$R[A, B, C]$ enthält ferner keine der Reihen aca und bcb.

Man überzeugt sich zunächst davon, daß alle Reihen ABA, ABC, ACB, BCA, BAC, BAB, CAB, CAC, CBA und CBC irreduktibel in Bezug auf a, b und c sind.

Enthielte nun ferner $R[A, B, C]$ eine Reihe UU, so bildete UU eine Unterreihe von einer Unterreihe $PNSNQ$ der Reihe $R[A, B, C]$, wo jeder der Buchstaben P, Q und S eine der genannten Reihen A, B oder C bedeuten würde, während also jedes N aus solchen Reihen zusammengesetzt wäre.

Gleichzeitig könnte man schreiben:

$$P = \gamma\beta\,, \quad S = \alpha\beta\,, \quad Q = \alpha\delta$$
$$U = \beta N\alpha$$
$$PNSNQ = \gamma[\beta N\alpha][\beta N\alpha]\delta\,.$$

Da $R[a, b, c]$ irreduktibel ist, müssen P sowohl wie Q von S verschieden sein.

Da ferner

$$PSQ = \gamma[\beta\alpha][\beta\alpha]\delta$$

reduktibel ist, erhält man

$$S = C$$
$$P = Q = K$$

wo K einer Reihe A oder einer Reihe B gleich ist.

Bezeichnen wir durch H die andere der Reihen A und B, so bekommen wir also entweder

$$N = H$$

oder

$$N = HMH\,.$$

In beiden Fällen enthielte $R[A, B, C]$ folglich die Reihe HCH, und $R[a, b, c]$, also die Reihe aca oder bcb.

Da dies nicht möglich ist, kann $R[A, B, C]$ demnach keine Unterreihe von der Form UU besitzen.

Durch diesen letzten Satz kann man in a, b und c einfach und zweifach unendliche irreduktible Reihen, wo die Reihen aca und bcb fehlen, konstruieren.

Ebenso kann man geschlossene Reihen dieser Art, wo die Anzahl der Zeichen größer als eine gegebene Zahl wird, bilden.

Nach dem Satze der Seite 33 leuchtet es ein, daß von irreduktiblen geschlossenen Reihen der genannten Art nur eine endliche Anzahl Klassen existiert.

Wegen eines Zusammenhanges, den wir sogleich nachweisen werden, zwischen Reihen des eben betrachteten Falles I und Reihen, die in Bezug auf zwei Arten von Zeichen irreduktibel sind, werden wir darauf verzichten, Schlüsse aus den beiden letzten Sätzen zu ziehen.

Satz 20. *Bedeutet R eine von Buchstaben x und von Buchstaben y gebildete zweifach unendliche oder geschlossene Reihe, die in Bezug auf x und y irreduktibel ist, dann kann man R erstens nur auf eine einzige Weise aus Reihen*

$$\alpha = A$$
$$\alpha\beta = C$$
$$\alpha\beta\beta = B$$

wo α der eine beliebig gewählte und β der andere der Buchstaben x und y bezeichnen, zusammensetzen.

Schreibt man zweitens in R, wenn R wenigstens aus 6 Zeichen gebildet ist, statt jeder der Reihen A den Buchstaben a, statt jeder der Reihen B den Buchstaben b und statt jeder der Reihen C den Buchstaben c, so wird die hierdurch erhaltene Reihe T, die keine der Reihen aca oder bcb besitzt, in Bezug auf a, b und c irreduktibel.

Da

$$\beta ACA\alpha\beta = \beta\alpha\alpha\beta\alpha\alpha\beta$$
$$BCB = \alpha\beta[\beta\alpha\beta\alpha\beta]\beta$$

kann ja T keine der Reihen aca und bcb enthalten.

Da keine der Reihen AA, BB oder CC in R vorkommen kann, besitzt T keine der Reihen aa, bb und cc.

Enthielte nun T eine Unterreihe UU, in der U von mehr als einem einzigen Zeichen gebildet wäre, und bedeutete WW die entsprechende Reihe von R, so könnten wir schreiben

$$W = \alpha M.$$

R besäße dann, — was jedoch gegen die Voraussetzung streitet —, die reduktible Unterreihe

$$WW\alpha = \alpha M\alpha M\alpha.$$

Hierdurch ist der Satz bewiesen.[1]

[1] Vergleiche meine Abhandlung: „Über unendliche Zeichenreihen“ (Christiania Vid.-Selsk. Skrifter. 1906. No. 7).

Umgekehrt bekommt man:

Satz 21. *Schreibt man in einer aus Buchstaben a, Buchstaben b und Buchstaben c gebildeten zweifach unendlichen oder geschlossenen Reihe $R[a, b, c]$, die in Bezug auf a, b und c irreduktibel ist und keine der Reihen aca und bcb enthält, statt jedes a den Buchstaben x, statt jedes b die Reihe xyy und statt jedes c die Reihe xy, so wird die so gebildete Reihe $R[x, xyy, xy]$ in Bezug auf x und y irreduktibel.*

Wir werden also nachweisen, daß $R[x, xyy, xy]$ keine Unterreihe S von der Form $zNzNz$, wo z ein x oder ein y bedeutet, enthalten kann.

Ohne weiteres sieht man ein, daß z von x verschieden sein muß.

Wenn also $S = yNyNy$, kann nicht $N = yM$, oder $S = yyMyyMy$ sein.

Denn sonst enthielte $R[x, xyy, xy]$ ja die Reihe $xS = xyyMyyM = xyyM'xyyM'x$, und $R[a, b, c]$ müßte reduktibel sein.

Es kann auch nicht $N = x$ sein. Wären nämlich $S = yxyxy$, so enthielte $R[a, b, c]$ die unmögliche Reihe bcb. Wir haben also $N = xM$ oder $S = yxMyxMy$.

Hier wird nicht $M = y$, oder $S = y[xyy][xyy]$; auch nicht $M = M'y$, oder $S = y[xM'yy][xM'yy]$.

Ferner wird nicht $M = x$, oder $S = yxxyxxy$. Sonst enthielte ja $R[a, b, c]$ die unmögliche Reihe aca. Wir erhalten folglich $M = M'x$ oder $S = yxM'xyxM'xy$.

Da $R[a, b, c]$ irreduktibel ist, bildet weder xS noch Sx eine Unterreihe von $R[x, xyy, xy]$.

Ist also $R[x, xyy, xy]$ in Bezug auf x und y reduktibel, so enthält diese Reihe eine Unterreihe

$$xySy = xyyxM'xyxM'xyy.$$

$R[a, b, c]$ enthielte dann eine Unterreihe

$$bKcKb.$$

K muß hier mehr als ein Zeichen enthalten. Sonst bekämen wir $K = a$. Da aca nicht in $R[a, b, c]$ vorkommen darf, wird dies aber unmöglich.

Wir bekommen also

$$K = aK'a.$$

Aber dann enthielte ja $R[a, b, c]$ fortwährend die unmögliche Reihe aca.

Hierdurch ist unser Satz bewiesen.

Zweiter Fall.

aba und *aca* fehlen.

Fig. 6.

14. Da man geschlossene Reihen auf dieselbe Weise wie zweifach unendliche Reihen behandeln kann, genügt es, hier der Einfachheit halber nur Reihen der letzten Art zu betrachten.

Wir erhalten hier die Verzweigung:

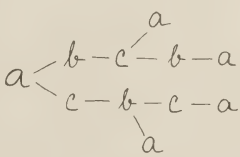


Fig. 7.

Eine aus Buchstaben a, b und c gebildete irreduktible, zweifach unendliche Reihe $T = R[a, b, c]$, die keine Unterreihe *aba* oder *aca* besitzt, ist folglich ausschließlich aus Reihen

$$abc = x$$
$$acb = y$$
$$abcb = z$$
$$acbc = u$$

zusammengesetzt.

T enthält keine der Reihen:

$$xz,\ yu,\ zy,\ ux,$$
$$xyx,\ yxy,\ xuy,\ yzx,$$
$$NxNz,\ NyNu,\ zNyN,\ uNxN,$$
$$NN,$$

wo N aus Reihen x, y, z und u gebildet ist.

Die Reihen

$$xz = abc\,abc\,b$$
$$yu = acb\,acb\,c$$
$$zya = ab\,cba\,cba$$
$$uxa = ac\,bca\,bca$$

$$xyxu = xy\,xy\,c$$
$$yxyz = yx\,yx\,b$$
$$xuy = ab\,cy\,cy$$
$$yzx = ac\,bx\,bx$$

$$NxNz = Nx\,Nx\,b$$
$$NyNu = Ny\,Ny\,c$$

$$uNxNa = ac\,bcNa\,bcNa$$
$$zNyNa = ab\,cbNa\,cbNa$$
$$NN$$

sind nämlich alle reduktibel.

T enthält ferner keine der Reihen $xNuNy$ und $yNzNx$; denn

$$xNuNy = ab\,cNacb\,cNacb$$
$$yNzNx = ac\,bNabc\,bNabc$$

Wenn P und Q aus Reihen x, y, z und u gebildete Unterreihen von T bedeuten, kann T, wenn P von uz und Q von zu verschieden sind, keine Unterreihe PxP oder QyQ enthalten.

Es genügt, nachzuweisen, daß z. B. PxP in T nicht vorkommen kann.

In einer etwaigen Unterreihe PxP von T, wo P von uz verschieden ist, muß P, wie sofort ersichtlich ist, aus wenigstens drei der genannten Reihen gebildet sein.

Wir können nun schreiben:

$$P = P_1 z.$$

Sonst hätten wir $P = P_1 y$, und T enthielte dann eine der unmöglichen Reihen

$$P_1 yx\,P_1 yx = PxPx$$

oder

$$P_1 yx\,P_1 yz = PxPz.$$

Da yzx unmöglich ist, wird ferner

$$P = P_1 z = P_2 uz .$$

Da ferner $PxP = P_2uzxP_2uz$ eine Unterreihe der Reihe P_2uzxP_2uz/u sein muß, wird entweder $P_2 = x$ oder $P_2 = P_3x$. Da nicht $P_2 = x$ sein kann, wird also $P = P_3xuz$.

Ferner wird $P = uP'$. Sonst bekämen wir $P = yP'$, und T enthielte dann eine der unmöglichen Reihen

$$xyP'xyP' = xPxP$$

oder

$$uyP'xyP' = uPxP.$$

Wir haben also, da xuy unmöglich ist:

$$P \quad uP' = uzP''.$$

Da T aber nicht eine reduktible Reihe $PxP = P_3xuzxuzP'''$ enthalten kann, ist hierdurch unsere Behauptung bewiesen.

Durch Vertauschen von b und c wird es schließlich auch klar, daß QyQ auch in T unmöglich ist.

Satz 22. *Es bedeute $U = S[x, y, z, u]$ eine beliebige, nicht geschlossene Zeichenreihe, in der jedes Zeichen ein x, ein y, ein z oder ein u ist. U soll ferner so beschaffen sein, daß keine der Reihen:*

$$\begin{gathered} xz,\ yu,\ zy,\ ux, \\ xyx,\ yxy,\ xuy,\ yzx, \\ NxNz,\ NyNu,\ zNyN,\ uNxN, \\ NN \end{gathered}$$

wo N eine Zeichenreihe der genannten Zeichen bedeutet, eine Unterreihe von U bilden wird. Schreibt man dann in U statt der Buchstaben x, y, z und u beziehungsweise die Reihen abc, acb, abcb und acbc, so wird die auf diese Weise gebildete Reihe $K = S[abc, acb, abcb, acbc]$ in Bezug auf a, b und c irreduktibel. Endlich enthält K keine Unterreihe aba oder aca.

Der letzte Teil des Satzes leuchtet ohne weiteres ein.

Wir brauchen also bloß nachzuweisen, daß K keine Unterreihe WW enthalten kann.

Das System der vier Reihen x, y, z und u wollen wir mit G bezeichnen.

Eine etwaige Reihe WW und also auch W muß jedenfalls ein a enthalten. Sonst würde ja WW eine Unterreihe einer der Reihen x, y, z oder u bilden.

Enthielte W nicht zwei, sondern nur ein einziges a, so bildete WW eine Unterreihe einer Reihe von drei Reihen des Systems G.

Aber alle diese Reihen:

$$xyz,\ xuz,\ zxy,\ zxu,\ zuy,\ zuz,$$
$$yxu,\ yzu,\ uyx,\ uyz,\ uzx,\ uzu$$

sind irreduktibel in Bezug auf a, b und c.

Enthält endlich W wenigstens zwei Buchstaben a, so können wir schreiben:

$$hWWk = h\underbrace{\alpha M_1 \cdots M_r \beta}_{W}/\underbrace{\alpha M_1 \cdots M_r \beta}_{W} k$$

wo $r \geqq 1$, während jedes M und jede der Reihen $h\alpha$, $\beta\alpha$ und βk, wo α, aber nicht β fehlen kann, eine der Reihen x, y, z oder u bedeutet.

Wäre $\beta\alpha = x = abc$, so bekämen wir die Möglichkeiten

$$WW = M_1 \cdots M_r abc / M_1 \cdots M_r abc$$
$$WW = cM_1 \cdots M_r ab / cM_1 \cdots M_r ab$$
$$WW = bcM_1 \cdots M_r a / bcM_1 \cdots M_r a$$

Die Reihe U enthielte dann eine der unmöglichen Reihen

$$NxNx,\quad xNxN$$
$$NxNz,\quad uNxN$$

Wir bemerken hier, daß U keine Unterreihe $xNuNy$ oder $yNzNx$ enthält.

Im ersteren Falle bekämen wir nämlich $N = yN' = N''x$ oder $xNuNy = xN''xuyN'y$, und im letzteren Fälle: $N = xN' = N''y$ oder $yNzNx = yN''yzxN'x$. Aber xuy sowohl wie yzx sind nicht in U enthalten.

Wäre $\beta\alpha = z = abcb$, so bekämen wir die Alternativen:

$$WW = M_1 \cdots M_r abcb / M_1 \cdots M_r abcb$$
$$WW = bM_1 \cdots M_r abc / bM_1 \cdots M_r abc$$
$$WW = cbM_1 \cdots M_r ab / cbM_1 \cdots M_r ab$$
$$WW = bcbM_1 \cdots M_r a / bcbM_1 \cdots M_r a$$

U enthielte dann eine der unmöglichen Reihen

$$NzNz$$
$$yNzNx$$
$$zNzN$$

Durch Vertauschen von b und c erhält man auch die Unmöglichkeit der Alternativen $\beta\alpha = y$ und $\beta\alpha = u$.

Hierdurch ist der Satz bewiesen.

Da z in einer etwaigen zweifach unendlichen Reihe $U = S[x, y, z, u]$ nicht fehlen kann, bekommt man die Verzweigung

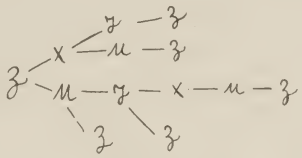


Fig. 8.

Die unendliche Reihe U ist also, wenn sie überhaupt möglich wäre, aus den Reihen

$$\begin{aligned} zuyxu &= A \\ zu &= B \\ zuy &= C \\ zxu &= D \\ zxy &= E \end{aligned}$$

zusammengesetzt.

U enthält keine der Reihen

$$\begin{gathered} AB,\ AD,\ BA,\ BC, \\ CA,\ CD,\ CE, \\ DB,\ DE,\ EC,\ ED, \\ BEB,\ EBE,\ DAC, \\ DCBD,\ CBDC. \end{gathered}$$

Ferner enthält U keine Unterreihe NN, wo N aus Reihen A, B, C, D und E zusammengesetzt ist.

Wir haben ja

$$\begin{aligned} ABz &= zuyxuzuz \\ ADz &= zuyxuzxuz \\ BA &= zuzuyxu \\ BC &= zuzuy \\ CA &= zuyzuyxu \\ CD &= zuyzxu \\ CE &= zuyzxy \\ DBz &= zxuzuz \\ uDE &= uzxuzxy \\ ECzu &= zxyzuyzu \end{aligned}$$

$$ED = zxyzxu$$
$$yBEBzx = yzuzxyzuzx$$
$$uEBEz = uzxyzuzxyz$$
$$DAC = zxuzuyxuzuy$$
$$BDCBDA = BDzuyBDzuyxu$$
$$ACBDCBE = zuyxuCBzxuCBzxy.$$

U fehlt auch, wenn N von Reihen A, B, C, D und E gebildet ist, alle Reihen der Formen: NAN, wo N von E verschieden ist, ferner NBN und endlich $NCNA$, $NCNB$, $NCND$, $ANCN$, $BNCN$, $DNCN$, $NDNA$, $NDNB$, $NDNC$, $ANDN$, $BNDN$, $CNDN$, $NENA$, $NENB$, $NEND$, $ANEN$, $BNEN$, $DNEN$.

Da in der unendlichen Reihe U nicht B fehlen kann, bekommt man die Verzweigung

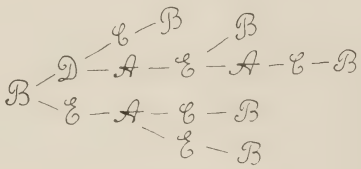


Fig. 9.

Die Reihe U ist also ausschliefslich aus Reihen

$$BDAEAC = A'$$
$$BDC = B'$$
$$BDAE = C'$$
$$BEAC = D'$$
$$BEAE = E'$$

zusammengesetzt.

Satz 23. *Bedeutet $F = Y[A, B, C, D, E]$ eine zweifach unendliche Zeichenreihe, in der jedes Zeichen ein A, ein B, ein C, ein D oder ein E ist, während die Reihe keine Unterreihe*

$$NN,$$
$$AB,\ AD,\ BA,\ BC,\ CA,\ CD,\ CE,\ DB,\ DE,\ EC,\ ED,$$
$$BEB,\ EBE,\ DAC,$$
$$DCBD,\ CBDC$$

besitzt, dann kann die Reihe F erstens ausschließlich aus Reihen

$$BDAEAC = A'$$
$$BDC = B'$$
$$BDAE = C'$$
$$BEAC = D'$$
$$BEAE = E'$$

zusammengesetzt werden.

Zweitens enthält F keine der Reihen:

$$N'N'$$
$$A'B',\ A'D',\ B'A'\ B'C',\ C'A',\ C'D',\ C'E',\ D'B'\ D'E',\ E'C'\ E'D'$$
$$B'E'B',\ E'B'E',\ D'A'C'$$
$$D'C'B'D',\ C'B'D'C'.$$

Wir haben ja:

$$A'B' = BDAEACBDC$$
$$A'D'B = BDAEACBEACB$$
$$B'A' = BDCBDAEAC$$
$$B'C' = BDCBDAE$$
$$C'A' = BDAEBDAEAC$$
$$C'D' = BDAEBEAC$$
$$C'E' = BDAEBEAE$$
$$D'B' = BEACBDC$$
$$ED'E' = EBEACBEAE$$
$$CD'E' = CBEACBEAE$$
$$E'C'BD = BEAEBDAEBD$$
$$E'C'BE = BEAEBDAEBE$$
$$E'D' = BEAEBEAC$$
$$EB'E'B'BEA = EB'BEAEB'BEA$$
$$CE'B'E'BD = CE'BDCE'BD$$
$$D'A'C' = BEACBDAEACBDAE$$
$$B'D'C'B'D'A' = B'D'BDAEB'D'BDAEAC$$
$$A'C'B'D'C'B'E' = BDAEACC'B'BEACC'B'BEAE$$

Aus einer Reihe F kann man also eine neue Reihe derselben Art mit wenigen Zeichen bilden.

Ist die Anzahl der Zeichen von F größer als eine gewisse Zahl, so behält der Satz (23) fortdauernd seine Gültigkeit, wenn F eine geschlossene Reihe bedeutet.

Es existiert also bloß eine endliche Anzahl Klassen von geschlossenen Reihen F.

Satz 24. *Es bedeute $Q = f'P'$ eine nicht geschlossene Zeichenreihe, wo f' und jedes Zeichen von P' ein A', ein B', ein C', ein D' oder ein E' ist.*

Q enthalte keine der Reihen

$$A'B',\ A'D',\ B'A',\ B'C',\ C'A',\ C'D',\ C'E',\ D'B',\ D'E',\ E'C',\ E'D',$$
$$B'E'B',\ E'B'E',\ D'A'C'$$
$$D'C'B'D',\ C'B'D'C'$$

und ferner keine Reihe von der Form

$$N'N'.$$

Schreibt man dann in Q statt jedes Zeichens A', statt jedes Zeichens B', statt jedes Zeichens C', statt jedes Zeichens D' und statt jedes Zeichens E' beziehungsweise die Reihen $BDAEAC$, BDC, $BDAE$, $BEAC$ und $BEAE$, so enthält die auf diese Weise aus P' gebildete und aus Buchstaben A, B, C, D und E zusammengesetzte Reihe P keine der Reihen

$$AB,\ AD,\ BA,\ BC,\ CA,\ CD,\ CE,\ DB,\ DE,\ EC,\ ED,$$
$$BEB,\ EBE,\ DAC,$$
$$DCBD,\ CBDC$$

und ferner keine Reihe von der Form

$$NN$$

wo N eine Zeichenreihe bedeutet, in der jedes Zeichen ein A, ein B, ein C, ein D oder ein E ist.

Da der erste Teil des Satzes, was sofort ersichtlich ist, richtig sein muß, brauchen wir nur nachzuweisen, daß P keine Reihe NN enthält. In einer etwaigen Unterreihe NN von P, muß N wenigstens zwei Buchstaben B enthalten. Enthielte nämlich N höchstens ein einziges B, so bildete NN eine Unterreihe einer Reihe von drei Reihen des Systems (A', B', C', D', E'). Aber keine der hier möglichen Reihen $A'C'B'$, $A'E'A'$, $A'E'B'$, $B'D'A'$, $B'D'C'$, $B'E'A'$, $C'B'D'$, $C'B'E'$, $D'A'E'$, $D'C'B'$, $E'A'C'$, $E'A'E'$, $E'B'D'$ enthält eine Reihe NN in den Buchstaben A, B, C, D und E.

Enthält N in NN wenigstens 2 Buchstaben B, so können wir schreiben

$$NN = \alpha M_1 \cdots M_r \beta \,|\, \alpha M_1 \cdots M_r \beta$$

wo $r \geqq 1$, während erstens $\beta\alpha$ und jedes M eine der Reihen A', B', C', D' oder E' bedeutet, und zweitens β, welche Reihe mit B anfangen und nicht zwei B enthalten würde, wenigstens einen der Buchstaben A, B, C, D und E besitzen müßte.

Wir bemerken zunächst, daß α nicht fehlen kann. Sonst bekämen wir ja

$$NN = M_1 \cdots M_r\beta / M_1 \cdots M_r\beta = WC'WA'.$$

Vor C' und A' steht nur D. D. h. $W = W_1 D'$. Auf C' folgt B'. D. h. $W_1 = BW_2$. Oder

$$NN = B'W_2D'C'B'W_2D'A'.$$

Auf $D'C'B'$ folgt nicht D'; oder $W_2 = E'W_3$, oder

$$NN = B'E'W_3D'C'B'E'W_3D'A'$$

Vor $B'E'$ in Q steht nicht E'. Q enthält also dann die unmögliche Reihe

$$[C'B'E'W_3D'][C'B'E'W_3D']A'.$$

Wäre $\beta\alpha = A' = BDAEAC$, so bekämen wir die Alternativen:

$$\begin{aligned}
&(1) \cdots NN = DAEACWB/DAEACWB\\
&(2) \cdots NN = AEACWBD/AEACWBD\\
&(3) \cdots NN = EACWBDA/EACWBDA\\
&(4) \cdots NN = ACWBDAE/ACWBDAE\\
&(5) \cdots NN = CWBDAEA/CWBDAEA
\end{aligned}$$

wo W aus Reihen A', B', C', D' und E' zusammengesetzt ist.

Daß die Alternativen (1), (2) und (5) unmöglich sind, leuchtet sofort ein.

Bei den Alternativen (3) und (4) enthält Q eine Unterreihe

$$D'WA'WC'$$

Auf D' und A' folgt indessen nur C', und vor A und C steht nur D. D. h. $W = C'W_1D'$, oder $WA'W = C'W_1D'A'C'W_1D'$. Aber Q enthält nicht die Reihe $D'A'C'$.

Wäre $\beta\alpha = B' = BDC$, so bekämen wir die Alternativen:

$$\begin{aligned}
&(1) \cdots NN = DCWB/DCWB\\
&(2) \cdots NN = CWBD/CWBD
\end{aligned}$$

Da $B'WB'W$ in Q nicht möglich ist, können wir von (1) absehen. Bei der Alternative (2) bekommen wir die drei Fälle:

$$\begin{aligned}
&A'WB'WA'\\
&D'WB'W\\
&WB'WC'
\end{aligned}$$

Auf A' und B' folgt nur E'. Vor A' und B' steht nur E'. Oder $W = E'W_1E'$, oder $WB'W = E'W_1E'B'E'W_1E'$.

Da $E'B'E'$ in Q nicht vorkommen darf, ist demnach der erste Fall unmöglich. Da ferner keine der Reihen A', B', C', D' oder E' weder auf D' noch auf B' folgen kann, ist also der zweite Fall ebenfalls unmöglich. Der dritte Fall schließlich ist auch unmöglich. Keine der 5 genannten Reihen kann nämlich vor B' oder C' stehen.

Für $\beta\alpha = C' = BDAE$ erhält man die Alternativen:

$$\begin{aligned} NN &= DAEWB/DAEWB \\ NN &= AEWBD/AEWBD \\ NN &= EWBDA/EWBDA \end{aligned}$$

Da Q keine Unterreihe $C'WC'W$ enthält, ist die erste Alternative unmöglich.

Die zweite Alternative teilt sich in die zwei Fälle

$$\begin{aligned} &E'WC'WA' \\ &WC'WB' \end{aligned}$$

Der zweite Fall ist nicht möglich, da keine der 5 Reihen A', B', C', D' oder E' vor B' oder C' stehen kann.

Bei der dritten Alternative bekommt man auch den Fall:

$$E'WC'WA'$$

Auf E' und C' folgt nur B'. Vor C' und A' steht nur D', oder $W = B'W_1D'$, oder

$$E'WC'W = E'B'W_1D'C'B'W_1D'$$

Aber diese Reihe kann nicht in Q vorkommen. Auf $E'B'$ folgt nämlich nur D', und auf $D'C'B'$ nur E'.

Für $\beta\alpha = D' = BEAC$ erhalten wir die Alternativen:

$$\begin{aligned} NN &= EACWB/EACWB \\ NN &= ACWBE/ACWBE \\ NN &= CWBEA/CWBEA \end{aligned}$$

In der ersten Alternative erhält man die Reihe $A'WD'W$.

Vor D' steht nur B', und man erhält die Reihe $A'W_1B'D'W_1B'E'$.

Da keine der Reihen A', B', C', D' oder E' weder auf B' noch auf D' folgen kann, ist in dem dritten Fall die Reihe $B'WD'W$ unmöglich.

Nach allen drei Alternativen muß also Q eine Reihe $A'W_1B'D'W_1B'E'$ enthalten. Nach A' und D' steht nur C'. Q enthält demnach die Reihe

$W_1 B' D' C'' W_2 B' E'$. Da vor $B' D' C''$ nur E', und vor $B' E'$ nur C' stehen kann, wird dies aber unmöglich.

Wäre endlich $\beta\alpha = E' \quad BEAE$, so bekämen wir die Alternativen:

$$\begin{aligned} NN &= EAEWB/EAEWB \\ NN &= AEWBE/AEWBE \\ NN &= EWBEA/EWBEA \end{aligned}$$

Die erste Alternative ist unmöglich. Q kann ja keine Reihe $E'WE'W$ enthalten.

Nach jeder der beiden anderen Alternativen enthält Q eine Reihe $C'WE'WD'$.

Vor D' steht nur B', und auf C' folgt nur B'. Oder $WE'W = W_1 B' E' B' W_2$. Aber $B' E' B'$ ist nicht in Q enthalten.

Hierdurch ist unser Satz (24) bewiesen.

Durch wiederholte Anwendung des letzten Satzes können wir Reihen Q mit beliebig vielen Zeichen und ferner zweifach unendliche Reihen Q bilden.

Satz 25. *Eine zweifach unendliche Zeichenreihe F, in der jedes Zeichen ein A, ein B, ein C, ein D oder ein E ist, enthält keine der Reihen*

$$AB,\ AD,\ BA,\ BC,\ CA,\ CD,\ CE,\ DB,\ DE,\ EC,\ ED,$$
$$BEB,\ EBE,\ DAC,$$
$$DCBD,\ CBDC$$

und ferner keine Reihe von der Form

$$NN.$$

F besitzt dann keine der Reihen

$$WAWC,\ DWAW,\ CWEW,\ WEWD,$$
$$WDW,\ WCW,$$

wo die Reihe W wenigstens einen der Buchstaben A, B, C, D oder E enthält.

Enthält F eine Reihe $WAWC$, wo W wenigstens einen Buchstaben enthält, so bekommt man: $W = W_1 D$. W muß ja von D verschieden sein, während vor A und C nur D stehen kann. Oder $WAWC = W_1 DAW_1 DC$. Auf DA folgt nur E, d. h. $W_1 = EW_2$, während W_1 von E verschieden sein muß. Oder, wenn nur B vor D stehen kann, $W = EW_3 BD$, wo W_3 nicht verschwinden kann. Keiner der Buchstaben A, B, C, D oder E kann nämlich vor $EBDAEBD$ stehen. Vor $EW_2 DAEW_2 D$ steht nur B, und auf BE folgt nur A. Da W_3 nicht A gleich sein kann, erhält man also $W_3 = AW_4$ oder

$$BWAWC = B[EAW_4 BD]A[EAW_4 BD]C.$$

Auf AEA folgt CB, oder $W_4 = CBW_5$. Da die Reihe $CBDC$ nicht vorkommen darf, muß nämlich W_4 von C und also auch von CB verschieden sein.

Enthält folglich F eine Reihe $WAWC$, so enthält sie auch eine Reihe

$$[BEAC]BW_5[BDAEAC]BW_5[BDC]$$

Enthielte F eine Unterreihe

$$DWAW$$

wo DWA von DA verschieden wäre, so besäße F auch folgende Unterreihen:

$$DCW_1ACW_1$$
$$DCBW_2ACBW_2$$
$$DCBW_3EACBW_3E/B$$
$$DCBW_4AEACBW_4AE/B$$
$$DC[BW_5][BDAEAC][BW_5][BDAE]B$$

Wie früher gezeigt worden ist, kann man F ausschließlich aus Reihen

$$BDAEAC = A'$$
$$BDC = B'$$
$$BDAE = C'$$
$$BEAC = D'$$
$$BEAE = E'$$

zusammensetzen.

Schreibt man nun überall in F statt der Reihen A', B', C', D' und E' beziehungsweise die Buchstaben A, B, C, D und E, so entsteht auf diese Weise aus F eine neue aus Buchstaben A, B, C, D und E gebildete zweifach unendliche Reihe G mit denselben oben erwähnten Eigenschaften wie F.

Enthält also F eine Unterreihe $WAWC$, so muß G eine Unterreihe $DW'AW'$ enthalten.

Enthält ferner F eine Unterreihe $DWAW$, so muß G eine Unterreihe $W'AW'C'$ besitzen.

In beiden Fällen könnte W nicht aus einer endlichen Anzahl Buchstaben gebildet sein.

F enthält also keine der Reihen $WAWC$ und $DWAW$.

Enthält F eine Unterreihe

$$CWEW$$

so enthält F auch folgende Reihen

$$CBW_1EBW_1$$
$$CBW_2AEBW_2A$$
$$CBW_2AEBW_2A/CB$$
$$CBW_3EAEBW_3EA/CB$$
$$C[BW_4][BEAE][BW_4][BEA/C]B$$

und G enthält eine Reihe $W'EW'D$.

Enthält F eine Unterreihe $WEWD$, so enthält auch F folgende Reihen:

$$W_1BEW_1BD$$
$$AW_2BEAW_2BD$$
$$BDAW_2BEAW_2BD$$
$$BDAEW_3BEAEW_3BD$$
$$[BDAE][BW_4][BEAE][BW_4]BD$$

und G enthält eine Unterreihe $CW'EW'$.

Keine der Reihen $CWEW$ und $WEWD$ bildet also eine Unterreihe von F.

Enthält F eine Reihe WDW, so enthält F auch folgende Reihen:

$$W_1BDW_1BE$$
$$W_2CBDW_2CBE$$
$$AW_3CBDAW_3CBE$$
$$EAW_3CBDAW_3CBE$$
$$EAEW_4CBDAEW_4CBE$$
$$[BEAE][BW_5C][BDAE][BW_5C][BE]$$

und G enthält also die Reihe $EW'CW'$.

Enthält F eine Reihe WCW, so enthält F auch folgende Reihen:

$$EBW_1CBW_1$$
$$EBDW_2CBDW_2$$
$$EBDW_3ACBDW_3A$$
$$EBDW_3ACBDW_3A/E$$
$$EBDW_4EACBDW_4EA/E$$
$$E[BDW_5][BEAC][BDW_5][BEA/E]B$$

und G enthält eine Reihe $W'DW'E$.

Keine der Reihen $WDWE$ und $EWCW$ bildet also eine Unterreihe von F.

Hierdurch ist unser Satz demnach bewiesen.

Man bemerke die Analogie zwischen dem obenstehenden Beweis und den Beweisen für die Unmöglichkeit gewisser Diophantischen Gleichungen.

Satz 26. *Schreibt man in der zweifach unendlichen Zeichenreihe F, wo jedes Zeichen ein A, ein B, ein C, ein D oder ein E ist, während die Reihe keine der Reihen*

$$AB,\ AD,\ BA,\ BC,\ CA,\ CD,\ CE,\ DB,\ DE,\ EC,\ ED,$$
$$BEB,\ EBE,\ DAC,$$
$$DCBD,\ CBDC$$

und ferner keine Reihe von der Form

$$NN$$

besitzt, statt jedes A die Reihe zuyxu, statt jedes B die Reihe zu, statt jedes C die Reihe zuy, statt jedes D die Reihe zxu und statt jedes E die Reihe zxy, so enthält die auf diese Weise aus F gebildete und aus Buchstaben x, y, z und u zusammengesetzte Reihe U keine der Reihen

$$xz,\ yu,\ zy,\ ux,$$
$$xyx,\ yxy,\ xuy,\ yzx$$

und ferner auch keine der Reihen

$$MxMz,\ MyMu,\ zMyM,\ uMxM,$$
$$MM,$$

wo M eine Zeichenreihe bedeutet, in der jedes Zeichen ein x, ein y, ein z oder ein u ist.

Daß U keine der ersten 8 Reihen enthält, sieht man sofort ein. Enthält U eine Reihe $MxMz$, so enthält U auch folgende Reihen:

$$M_1yxM_1yz$$
$$uM_2yxuM_2yz$$
$$z/uM_3uyxuM_3uyz$$
$$z/uM_4zuyxuM_4zuyz$$
$$z/u[zM_5][zuyxu][zM_5][zuy]z$$

F enthielte aber dann die, nach dem Satze (25), unmögliche Reihe $WAWC$.

Enthält U eine Reihe $MyMu$, so enthält U also auch folgende Reihen

$$M_1xyM_1xu$$
$$zM_2xyzM_2xu$$
$$zM_2xyzM_2xu/z$$
$$[zM_3][zxy][zM_3][zxu]z$$

F enthielte dann die, nach dem Satze (25), unmögliche Reihe $WEWD$.

Enthält U eine Reihe $zMyM$, so enthält U auch die Reihen:

$$zxM_1yxM_1$$
$$zxM_2uyxM_2u$$
$$zxM_2uyxM_2u/z$$
$$zxM_3zuyxM_3zu/z$$
$$zxuM_4zuyxuM_4zu/z$$
$$[zxu][zM_5][zuyxu][zM_5][zu]z$$

F enthielte dann die, nach dem Satze (25), unmögliche Reihe $DWAW$.

Enthält endlich U eine Reihe $uMxM$, so enthält diese Reihe auch die Reihen:

$$uyM_1xyM_1$$
$$uyM_2zxyM_2z$$
$$z/uyM_2zxyM_2z$$
$$[zuy][zM_3][zxy][zM_3]z$$

F enthielte dann die, nach dem Satze (25), unmögliche Reihe $CWEW$.

Wir wollen schließlich nachweisen, daß U keine Unterreihe MM haben kann.

Eine etwaige Unterreihe MM und also auch M muß jedenfalls ein z enthalten. Enthält M nicht zwei Buchstaben z, so muß eine etwaige Reihe MM eine Unterreihe einer Reihe von drei Reihen des Systems (A, B, C, D, E) bilden.

Aber keine der hier in Betracht kommenden Reihen

$$ACB,\ AEA,\ AEB,\ BDA,\ BDC,\ BEA,\ CBD,\ CBE,\ DAE,\ DCB,$$
$$EAC,\ EAE,\ EBD$$

enthält eine Unterreihe MM, wo jedes Zeichen ein x, ein y, ein z oder ein u ist.

Enthält M in einer etwaigen Unterreihe MM von U wenigstens zwei Buchstaben z, so können wir schreiben:

$$MM = \alpha W_1 \cdots W_r\beta / \alpha W_1 \cdots W_r\beta$$

wo jede der Reihen $W_1, \cdots, W_r$ und $\beta\alpha$ eine der Reihen A, B, C, D oder E bedeutet, während β einen, und auch nur einen Buchstaben z enthält.

α kann nicht verschwinden. Hätte man nämlich:

$$MM = W_1 \cdots W_r\beta / W_1 \cdots W_r\beta$$

so enthielte FU eine der Reihenformen $WBWA$, $WBWC$ oder $WCWA$.

Besäße F eine Reihe $WBWA$, so enthielte F auch die Reihen

$$W'EBW'EA$$
$$DW''EBDW''EA$$

F enthielte dann die unmögliche Reihe $BWBW$. Da gleichzeitig vor B und C keine der 5 Reihen A, B, C, D oder E stehen kann, ist $WBWC$ unmöglich. Enthält F eine Reihe $WCWA$, so enthält F auch eine Reihe $BW'CBW'A$ und also auch die nach dem Satze (25) unmögliche Reihe $EWCW$ oder die Reihe $CWCW$.

Für $\beta\alpha = A = zuyxu$ bekommen wir die Alternativen:

$$MM = uyxuWz/uyxuWz$$
$$MM = yxuWzu/yxuWzu$$
$$MM = xuWzuy/xuWzuy$$
$$MM = uWzuyx/uWzuyx$$

Nach dem ersten und zweiten Falle enthielte F also die unmögliche Reihe $AWAW$, und nach dem vierten Falle die unmögliche Reihe $WAWA$.

Nach dem dritten Falle enthielte F die nach dem Satze (25) unmögliche Reihe $WAWC$.

Ist $\beta\alpha = B = zu$, so bekommen wir die Alternative:

$$MM = uWz/uWz$$

F enthielte dann eine der Reihen:

$$AWBW \text{ oder } DWBW.$$

Die Unmöglichkeit der letzten Reihe haben wir früher gezeigt. Enthält F eine Reihe $AWBW$, so enthielte F auch die Reihen:

$$AEW'BEW'$$
$$AEW''CBEW''C$$
$$AEW''CBEW''C/B$$

was unmöglich ist.

Für $\beta\alpha = C = zuy$ erhalten wir die Alternativen:

$$MM = uyWz/uyWz$$
$$MM = yWzu/yWzu$$

Im ersten und im zweiten Falle enthält F die nach dem Satze (25) unmögliche Reihe WCW. Nach dem ersten Falle enthielte F auch die unmögliche Reihe $CWCW$.

Für $\beta\alpha = D = zxu$ bekommt man die Alternativen:

$$MM = xuWz/xuWz$$
$$MM = uWzx/uWzx$$

Nach der ersten und zweiten Alternative enthält F die nach dem Satze (25) unmögliche Reihe WDW.

Für $\beta a = E = zxy$ erhalten wir schließlich die Alternativen:

$$MM = xyWz\,|\,xyWz$$
$$MM = \;yWzx\,|\,yWzx$$

Im ersten Falle enthielte F die unmögliche Reihe $EWEW$, und im zweiten Falle entweder die unmögliche Reihe $WEWE$ oder die nach dem Satze (25) unmögliche Reihe $WEWD$.

Hierdurch ist unser Satz (26) also bewiesen.

Durch die Sätze (22), (23), (24), (25) und (26) kann man, wie sofort zu sehen ist, aus den Buchstaben a, b und c eine in Bezug auf a, b und c irreduktible, zweifach unendliche Reihe, die keine Unterreihen aba oder aca enthält, bilden.

Dritter Fall.

aba und *bab* fehlen.

15. Wir bekommen hier die Verzweigung:

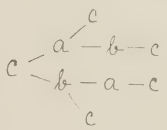


Fig. 10.

Jede aus Buchstaben a, b und c gebildete, zweifach unendliche Zeichenreihe R, die in Bezug auf a, b und c irreduktibel ist und keine der Reihen aba und bab enthält, läßt sich also ausschließlich aus Reihen

$$ca = x$$
$$cb = y$$
$$cab = z$$
$$cba = u$$

zusammensetzen.

R enthält keine der Reihen

$$xz\,,\quad yu\,,\quad zy\,,\quad ux$$
$$xyx\,,\quad yxy\,,\quad yzx\,,\quad xuy$$

und ferner keine der Reihenformen

$$NxNz\,,\quad NyNu\,,\quad zNyN\,,\quad uNxN\,,$$
$$NN$$

wo N von Reihen des Systems (x, y, z, u) gebildet ist.

Wir haben nämlich:

$$xz = caca\,b$$
$$yu = cbcb\,a$$
$$zy/c = ca\,bcbc$$
$$ux/c = cb\,acac$$
$$xyx/cb = cacb\,cacb$$
$$yxy/ca = cbca\,cbca$$
$$yzx = c\,bcabca$$
$$xuy = c\,acbacb$$
$$NxNz = Nca\,Nca\,b$$
$$NyNu = Ncb\,Ncb\,a$$
$$zNyN/c = ca\,bNc\,bNc$$
$$uNxN/c = cb\,aNc\,aNc$$

Da R irreduktibel ist, muß NN fehlen.

Nach diesem Ergebnis und nach dem Satze (22) folgt:

Satz 27. *Schreibt man in einer aus Buchstaben a, b und c gebildeten, zweifach unendlichen Zeichenreihe R, die keine der Reihen aba und bab und keine Reihe von der Form NN enthält und also aus Reihen: ca, cb, cab und cba zusammengesetzt werden kann, statt jeder Reihe ca die Reihe abc, statt jeder Reihe cb die Reihe acb, statt jeder Reihe cab die Reihe abcb und statt jeder Reihe cba die Reihe acbc, so enthält die auf diese Weise gebildete zweifach unendliche Reihe S keine der Reihen*

aba und aca

und ferner keine Reihe von der Form

MM.

Dieser Satz läßt sich auch umkehren.

Durch Vertauschen von a und c erhält man:

Satz 28. *Nimmt man von einer aus Buchstaben a, b und c gebildeten, zweifach unendlichen Reihe S, die keine der Reihen*

cbc und cac

und ferner keine Reihe von der Form

MM

besitzt, überall den Buchstaben, der unmittelbar auf der rechten Seite eines beliebigen Buchstaben c steht, weg, oder schreibt man mit anderen Worten

überall statt jeder der Reihen ca und cb den Buchstaben c, so wird die auf diese Weise gebildete Reihe R keine der Reihen

$$aba \quad und \quad bab$$

und ferner keine Reihe von der Form

$$NN$$

enthalten.

S kann ausschließlich aus Reihen cba, cab, $cbab$ und $caba$, und R also ausschließlich aus Reihen ca, cb, cab und cba gebildet werden.

R enthält demnach keine der Reihen aba oder bab.

Enthielte nun R eine Unterreihe NN, so müßte $N = N_1 c$ sein; sonst enthielte S eine Reihe MM. Enthielte R eine Reihe $N_1 c\, N_1 c$, so wäre N_1 von a und b verschieden. Sonst enthielte S eine der Reihen $acbac$ oder $bcabc$, oder eine der Reihen $cacbac$ oder $cbcabc$. Wir nehmen also z. B. $N_1 = aN_2$. R enthielte dann eine Reihe

$$cbaN_2caN_2c = cbacN_3cacN_3c\,.$$

S enthielte dann aber die unmögliche Reihe

$$ca[bacKc][bacKc]\,.$$

Auf dieselbe Weise sieht man ein, daß nicht $N_1 = bN_2$ sein kann.

Hierdurch ist unser Satz bewiesen.

---

16. Schließlich merken wir uns:

Satz 29. *Bedeutet*

$$R = x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots .$$

eine einfach unendliche Zeichenreihe, in der jedes x ein a, ein b oder ein c bezeichnet, während R in Bezug auf diesen Buchstaben irreduktibel ist und also mit anderen Worten keine Unterreihe von der Form UU besitzt, dann bildet nicht jedes x der Reihe das linke Endzeichen einer Unterreihe WfW, wo f ein a, ein b oder ein c bedeutet.

Wir werden die Unmöglichkeit einer Reihe R der genannten Beschaffenheit beweisen. *Hilfssatz.* Indem p, q und r auf beliebige Weise die Buchstaben a, b und c darstellen, bedeutet $pM = pqM'$ eine Reihe, die nicht in R vorkommen kann.

Soll dann $M = qM'$ in R_1, wo $R = x_0 R_1$, vorkommen, während also

$$MD = qM'D = WfWE$$

wo f ein einziges Zeichen bedeutet, dann wird $f = p$, während W weniger Zeichen als M enthalten muß.

Enthielte nämlich R_1 eine Unterreihe M, so besäße R eine Unterreihe

$$rMD = rqM'D = rWfWE.$$

f muß folglich von q und r verschieden sein. Oder

$$f = p.$$

Enthielte ferner W nicht weniger Zeichen als M, so bekämen wir folglich $W = MF$, wo F gern ganz fehlen kann, oder $fW = pMF$. R besäße aber dann die unmögliche Reihe pM.

Bedeutet α einen beliebigen der Buchstaben a, b oder c, β einen beliebigen der zwei anderen und γ den dritten dieser Buchstaben, so enthält die Reihe R_2, wo $R_1 = x_1 R_2$, keine Unterreihe

$$N = \alpha\beta\gamma\alpha\gamma\beta\alpha\beta\gamma\alpha$$

Da nämlich $\gamma\beta N$ und $N\gamma\beta$ reduktible Reihen sind, kann keine der Reihen βN und $N\gamma$ in R_1 vorkommen. Da βN in R_1 unmöglich ist, enthält in einer etwaigen Unterreihe

$$ND = W\beta WE = \alpha\beta\gamma\alpha\gamma\beta\alpha\beta\gamma\alpha D$$

von R_2, W weniger Zeichen als N. Wir bekämen aber dann einen der unmöglichen Fälle:

$$W\beta W = [\alpha\beta\gamma\alpha\gamma]\beta[\alpha\beta\gamma\alpha\gamma] = N\gamma$$
$$W\beta W = [\alpha]\beta[\alpha]$$

Ist $N = \alpha\beta N_1$, so kann $N_1\beta$ nicht in R_3, wo $R_2 = x_2 x_3 R_3$, vorkommen.

Da nämlich $\alpha\beta N_1$ und also auch $\alpha\beta N_1\beta$ nicht in R_2 vorkommen, kann $\beta N_1\beta$ nicht eine Unterreihe von $x_3 R_3$ bilden. Jeder der Fälle

$$\beta N_1\beta D = \beta\gamma\alpha\gamma\beta\alpha\beta\gamma\alpha\beta D = W\alpha WE = [\beta\gamma\alpha\gamma\beta\underbrace{\alpha\beta\gamma}]\underbrace{\alpha[\beta\gamma}\ldots]E$$
$$W\alpha WE = [\beta\gamma\alpha\gamma\beta]\alpha[\beta\gamma\alpha\gamma\beta\,.\,]E$$

ist ja unmöglich. Da $\beta N_1\beta$ eine Unterreihe von $x_3 R_3$, wenn $N_1\beta$ eine Unterreihe von R_3 ist, bilden muß, so kann $N_1\beta$ unmöglich eine Unterreihe von R_3 sein.

Setzt man $N_1 = \gamma N_2$, so ist $N_2\beta$ nicht in R_4, wo $R_3 = x_4 R_4$, enthalten.

Im entgegengesetzten Falle bekämen wir nämlich:

$$\alpha\gamma\beta\alpha\beta\gamma\alpha\beta D = W\gamma WE$$

oder

$$\alpha\gamma\beta\alpha\beta\gamma\alpha\beta D = [\alpha\gamma\beta\alpha\beta]\gamma[\alpha\gamma\ldots]E$$

was umöglich ist.

Schreibt man $N_2 = \alpha N_3$, so besitzt R_5, wo $R_4 = x_5 R_5$, keine Unterreihe $N_3\beta$. Die Gleichung

$$\gamma\beta\alpha\beta\gamma\alpha\beta D = W\alpha WE$$

wird nämlich, wie sofort zu sehen ist, unmöglich.

$\alpha\beta\gamma\alpha\beta$ bildet folglich keine Unterreihe von R_6, wo $R_5 = x_6 x_7 R_6$. Enthält nämlich R_6 eine Reihe $\alpha\beta\gamma\alpha\beta$, so enthält auch R_5 die unmögliche Reihe $\gamma\beta\alpha\beta\gamma\alpha\beta$.

Ist $R_6 = x_8 R_7$, so besitzt R_7 keine Unterreihe $\beta\gamma\alpha\beta$.

Wird nämlich

$$\beta\gamma\alpha\beta D = W\alpha WE$$

so bekämen wir die unmögliche Gleichung

$$W\alpha W = \beta\gamma\alpha\beta\gamma.$$

Endlich enthält R_8, wo $R_7 = x_9 R_8$, keine Unterreihe $\gamma\alpha\beta$.

Im entgegengesetzten Falle bekämen wir ja die unmögliche Gleichung:

$$\gamma\alpha\beta D = W\beta WE$$

d. h.

$$W\beta W = \gamma\alpha\beta\gamma\alpha.$$

Da indessen $\gamma\alpha\beta$ in R_8, wie früher gezeigt ist, jedenfalls vorkommen muß, ist hierdurch unser Satz (29) bewiesen.

KAP. IV.

Reihen, die in Bezug auf vier Zeichen irreduktibel sind.

17. Jede Zeichenreihe, in der jedes Zeichen einem von vier verschiedenen Zeichen gleich ist, während je zwei einander gleiche und außerhalb einander liegende Unterreihen der Reihe durch wenigstens zwei Zeichen getrennt sind, wird in Bezug auf die vier Zeichen irreduktibel genannt.

Der Einfachheit halber wollen wir hier nur zweifach unendliche Reihen betrachten.

Schreiben wir

$$abcad = x'$$
$$acbad = y'$$
$$bacbd = z'$$
$$bcabd = u'$$
$$cabcd = v'$$
$$cbacd = w'$$

so werden alle offenen Reihen $x'z'$, $x'w'$, $y'u'$, $y'v'$, $z'x'$, $z'v'$, $w'y'$, $u'w'$, $v'y'$, $v'z'$, $u'x'$ und $w'u'$ in Bezug auf a, b, c und d irreduktibel.

Satz 30. *Es bedeute $R[x, y, z, u, v, w]$, die wir durch S bezeichnen wollen, eine solche Zeichenreihe, in der jedes Zeichen einem der sechs Zeichen x, y, z, u, v oder w gleich ist, daß je zwei aufeinander folgende Zeichen der Reihe eine der Reihen xz, xw, yu, yv, zx, zv, uy, uw, vy, vz, wx oder wu bilden werden.*

Enthält ferner die Reihe S nicht zwei einander gleiche Unterreihen, die unmittelbar aufeinander folgen, dann muß die Reihe $R[x', y', z', u', v', w'] = S'$ in Bezug auf a, b, c und d irreduktibel sein.

Enthält nämlich S' eine Unterreihe $K = NM = LN$, wo die zwei nicht identischen Reihen N durch weniger als zwei Zeichen getrennt sind, dann muß K von mehr als 6 Zeichen gebildet sein. K enthielte dann eine Unterreihe UkU, wo k einem der Buchstaben a, b, c oder d gleich wäre.

Schreibt man eine beliebige der Reihen x', y', z', u' v' oder w' in der Form $\alpha h \beta$, wo h einen einzigen der Buchstaben a, b, c oder d bedeutet, während α oder β fehlen können, so wird α oder β für die Reihe charakteristisch. Die Reihe ist durch α oder β völlig bestimmt.

Wir wollen nun zunächst nachweisen, daß eine etwaige Unterreihe UkU von S' in einer Reihe der drei aufeinander folgenden Reihen, x', y', z', u', v' oder w' liegen muß. Sonst könnten wir schreiben:

$$UkU = \underbrace{\beta W_1 \cdots W_r \alpha}_{U} k \underbrace{\beta W_1 \cdots W_r \alpha}_{U}$$

wo jede der Reihen W und die Reihe $\alpha k \beta = W_{r+1}$ eine der Reihen x', y', z', u', v' oder w' bedeuten würde.

Da α oder β für die Reihe W_{r+1} charakteristisch ist, so enthielte S' also entweder eine Unterreihe

$$W_1 \cdots W_r W_{r+1} W_1 \cdots W_r W_{r+1}$$

oder eine Unterreihe

$$W_{r+1} W_1 \cdots W_r W_{r+1} W_1 \cdots W_r.$$

Dies streitet indessen gegen unsere Voraussetzung in Bezug auf die Reihe S.

Aber auch eine etwaige Reihe UkU kann nicht in einer Unterreihe $W_1 W_2 W_3$ von S', wo jedes W eine der Reihen x', y', z', u', v' oder w' bedeutet, liegen. Der Buchstabe k von UkU bildete ja dann ein Zeichen von W_2, oder

$$UkU = \underbrace{\beta\alpha}_{U}\,k\,\underbrace{\beta\alpha}_{U}$$

$$W_1 W_2 W_3 = \underbrace{\gamma\beta}_{W_1}\,\underbrace{\alpha k\beta}_{W_2}\,\underbrace{\alpha\delta}_{W_3}$$

Da α oder β für die Reihe $W_2 = \alpha k\beta$ charakteristisch sind, bekommt man entweder $W_3 = W_2$ oder $W_1 = W_2$, was unmöglich ist.

Wir wollen nun zeigen, wie man eine zweifach unendliche Reihe S der genannten Art, wo sogar ein beliebiges der Zeichen x, y, z, u, v oder w ganz fehlen, bilden kann.

Wir bemerken, was sofort einleuchten wird, daß nicht zwei der Zeichen x, y, z, u, v oder w in S fehlen können.

Soll z. B. w in der zweifach unendlichen Reihe S nicht vorkommen, so müssen je zwei aufeinander folgende Zeichen y immer durch eine der vier symmetrischen Reihen v, u, vzv oder $vzxzv$ getrennt sein.

S setzt sich also aus Reihen

$$yv,\ yu,\ yvzv \text{ und } yvzxzv$$

zusammen.

S kann nicht die Reihe yvy enthalten. Sonst enthielte S auch die unmögliche Reihe:

$$[vyuy\overbrace{][vy}uy]$$

Man kann also S ausschließlich nur aus Reihen

$$A = yu$$
$$B = yvzv$$
$$C = yvzxzv$$

aufbauen.

Keine der Reihen ABA und CBC kann in S vorkommen.

Denn:

$$CABAC = \underbrace{yvzxz}_{C}\underbrace{[v}_{A}\underbrace{yu}_{B}\underbrace{yvz]}_{A}\underbrace{[v}_{C}\underbrace{yu}\underbrace{yvz]}xzv$$

$$CBC = \underbrace{yvzxz}_{C}\underbrace{[v}_{B}\underbrace{yvz]}_{C}\underbrace{[v}\underbrace{yvz]}xzv$$

Satz 31. *Bedeutet $P[A', B', C']$ eine aus Buchstaben A', B' und C' gebildete, zweifach unendliche Reihe, die in Bezug auf A', B' und C' irreduktibel ist, während die Reihe keine Unterreihe $A'B'A'$ oder $C'B'C'$ enthält, dann bildet $P[A, B, C]$ eine Reihe S der genannten Art.*

Jede Reihe von zwei aufeinander folgenden Zeichen x, y, z, u, v oder w in $P[A, B, C]$ bilden erstens eine der Reihen xz, yu, yv, zx,

zv, uy, vy oder vz. Zweitens folgen in $P[A, B, C]$, wo die Reihen ABA und CBC ganz fehlen, zwei einander gleiche, in den Zeichen x, y, z, u, v und w gebildete Unterreihen nicht unmittelbar aufeinander.

Da jede der Reihen ABC, ACA, ACB, BAC, BCA, BCB, BAB, CAB, CAC und CBA keine Unterreihe von der Form UU enthält, muß eine etwaige Unterreihe UU von S sich wenigstens über vier Reihen A, B oder C erstrecken.

Wir erhalten somit

$$UU = \underbrace{\beta W_1 \cdots W_r \alpha}_{U} \underbrace{\beta W_1 \cdots W_r \alpha}_{U}$$

und S enthält also eine Unterreihe

$$\gamma UU\delta = \gamma\beta W_1 \cdots W_r \alpha\beta W_1 \cdots W_r \alpha\delta$$

wo jede der Reihen W, $\gamma\beta$, $\alpha\beta$ und $\alpha\delta$ eine Reihe A, B oder C bedeutet. Hier kann $\alpha\beta$ nicht einer Reihe A oder C gleich sein. α oder β wäre nämlich dann für die Reihe charakteristisch, und wir bekämen entweder $\gamma\beta = \alpha\beta = W_{r+1}$ oder $\alpha\delta = \alpha\beta = W_{r+1}$, was gegen unsere Voraussetzung streitet. Wäre $\alpha\beta = B$, so bekämen wir die Alternativen:

$$\begin{aligned}
UU &= BW_1 \cdots W_r / BW_1 \cdots W_r && \cdots \text{(I)}\\
UU &= vzvW_1 \cdots W_r y / vzvW_1 \cdots W_r y && \cdots \text{(II)}\\
UU &= zvW_1 \cdots W_r yv / zvW_1 \cdots W_r yv && \cdots \text{(III)}\\
UU &= vW_1 \cdots W_r yvz / vW_1 \cdots W_r yvz && \cdots \text{(IV)}\\
UU &= W_1 \cdots W_r BW_1 \cdots W_r B && \cdots \text{(V)}
\end{aligned}$$

Die Fälle (I) und (V) sind unmöglich. Nach Fall (II) enthält ferner S eine unmögliche Unterreihe

$$yUU = BW_1 \cdots W_r / BW_1 \cdots W_r / y.$$

In jedem der beiden Fälle (III) und (IV) muß S eine Unterreihe

$$CW_1 \cdots W_r BW_1 \cdots W_r C$$

besitzen. Oder

$$W_1 = A \quad \text{und} \quad W_r = A.$$

S enthielte dann die unmögliche Reihe ABA.

Hierdurch ist der Satz bewiesen.

Wir haben also hier die Existenz von zweifach unendlichen, aus Zeichen a, b, c und d gebildeten Reihen, die in Bezug auf diese Zeichen irreduktibel sind, nachgewiesen. Man sieht auf dieselbe Weise sofort ein, daß es auch ähnliche geschlossene Reihen gibt, wo die Anzahl der Zeichen größer als eine beliebig gegebene Zahl wird.

KAP. V.

Reihen, die in Bezug auf n Arten von Zeichen irreduktibel sind.

$n > 4$.

Wir werden hier zeigen, wie man, wenn $n > 4$, solche Zeichenreihen aus beliebig vielen Zeichen, von denen jedes einem von n gegebenen Zeichen gleich ist, bilden kann, daß je zwei außerhalb einander liegende Unterreihen der Reihe überall durch wenigstens $n - 2$ Zeichen getrennt sind.

Wir wollen die Richtigkeit dieser Behauptung zunächst für den Fall, daß n eine gerade Zahl ist, nachweisen.

Indem $n = 2h$, schreiben wir

$$A = x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5 \cdots x_{2h-4}\, x_{2h-3}\, x_{2h-2}\, x_{2h-1}\, x_1\, x_{2h}$$

wo A aus der Reihe

$$x_1\, x_2\, x_3 \cdots x_{2h-1}\, x_{2h}$$

durch Einschaltung eines Zeichens x_1 zwischen x_{2h-1} und x_{2h} gebildet ist.

Aus A erhalten wir folgende h Reihen:

$$\begin{array}{ll}
A & = x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6\, x_7 \cdots\cdots\cdots x_{2h-4}\, x_{2h-3}\, x_{2h-2}\, x_{2h-1}\, x_1\, x_{2h} \\
A_1 & = x_3\, x_2\, x_5\, x_4\, x_7\, x_6\, x_9 \cdots\cdots\cdots x_{2h-4}\, x_{2h-1}\, x_{2h-2}\, x_1 \quad x_3\, x_{2h} \\
A_2 & = x_5\, x_2\, x_7\, x_4\, x_9\, x_6\, x_{11} \cdots\cdots\cdots x_{2h-4}\, x_1 \quad x_{2h-2}\, x_3 \quad x_5\, x_{2h} \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_{h-2} & = x_{2h-3}\, x_2\, x_{2h-1}\, x_4\, x_1\, x_6\, x_3 \cdots x_{2h-4}\, x_{2h-7}\, x_{2h-2}\, x_{2h-5}\, x_{2h-3}\, x_{2h} \\
A_{h-1} & = x_{2h-1}\, x_2\, x_1 \quad x_4\, x_3\, x_6\, x_5 \cdots x_{2h-4}\, x_{2h-5}\, x_{2h-2}\, x_{2h-3}\, x_{2h-1}\, x_{2h} \\
A_h & = A
\end{array}$$

wo A_{k+1} aus A_k, und A_1 aus A durch die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} x_1\, x_3\, x_5 & \cdots\cdots & x_{2h-3}\, x_{2h-1} \\ x_3\, x_5\, x_7 & & x_{2h-1}\, x_1 \end{pmatrix}$$

abgeleitet sind.

Die Reihe AA_1 ist in Bezug auf die $2h$ Zeichen x irreduktibel. AA_1 enthält nämlich nicht zwei einander gleiche, aber nicht identische, Reihen mit mehr als einem einzigen Zeichen. Jede der eventuellen einander gleichen Reihen müßte ja sonst ein Zeichen x mit geradem Index enthalten. Aber auf zwei solche einander gleiche Zeichen x_{2k} folgen nach links wie

nach rechts verschiedene Zeichen. Ferner sind je zwei einander gleiche Zeichen x von AA_1 durch wenigstens $2h-2$ Zeichen getrennt. Jede Reihe $A_k A_{k+1}$ ist also auch in Bezug auf die $2h$ Zeichen x irreduktibel.

Schreiben wir

$$AA_1 A_2 A_3 \cdots\cdots A_{h-1} = P$$

so werden je zwei einander gleiche Unterreihen von P durch wenigstens $2h-2$ Zeichen getrennt sein.

Je zwei einander gleiche Zeichen x von P sind ja durch wenigstens $2h-2$ Zeichen getrennt. Ferner enthält P nicht zwei einander gleiche Reihen mit mehr als einem einzigen Zeichen. Zwei solche Reihen müfsten ja Zeichen x mit geraden Indexen enthalten. Aber in P stehen auf den linken wie auf den rechten Seiten von zwei einander gleichen Zeichen x mit geradem Index und unmittelbar neben diesen Zeichen verschiedene Zeichen.

Auf dieselbe Weise sieht man auch ein, dafs PA in Bezug auf die $2h$ Zeichen x irreduktibel ist.

Aus A bildet man folgende $h+1$ Reihen:

$$\begin{aligned}
A &= x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \; x_6 x_7 \cdots\cdots\cdots x_{2h-3} x_{2h-2} x_{2h-1} x_1 x_{2h} \\
B_1 &= x_2 x_3 x_5 x_4 x_7 \; x_6 x_9 \cdots\cdots\cdots x_{2h-1} x_{2h-2} x_1 \quad x_2 x_{2h} \\
B_2 &= x_3 x_5 x_7 x_4 x_9 \; x_6 x_{11} \cdots\cdots\cdots x_1 \quad x_{2h-2} x_2 \quad x_3 x_{2h} \\
B_3 &= x_5 x_7 x_9 x_4 x_{11} x_6 x_{13} \cdots\cdots\cdots x_2 \quad x_{2h-2} x_3 \quad x_5 x_{2h} \\
&\cdots\cdots\cdots

Reihen $x_2 x_3$ durch $2h-2$, und die zwei Reihen $x_1 x_2$ durch $4h-3$ Zeichen getrennt. AB_1 und jede Reihe $B_k B_{k+1}$ sind also in Bezug auf die $2h$ Zeichen x irreduktibel.

Die Reihe

$$AB_1 B_2 B_3 \cdots\cdots B_{h-1} B_h = Q$$

enthält keine zwei einander gleiche Unterreihen, die durch $2h-3$ oder weniger Zeichen getrennt sind.

Q kann nämlich erstens nicht zwei einander gleiche Unterreihen von mehr als 3 Zeichen enthalten. Sonst enthielte jede der genannten Reihen jedenfalls eines der Zeichen x_4, x_6, $\cdots$ oder x_{2h}. Bedeutet aber y ein beliebiges dieser Zeichen, so enthält Q weder zwei Unterreihen αy noch zwei Unterreihen $y\beta$, wo α sowohl als β ein x bezeichnete.

Enthielte zweitens Q zwei einander gleiche Unterreihen, die keine der Zeichen x_4, x_6, $\cdots$ oder x_{2h} besäßen, während jede von ihnen also von höchstens 3 Zeichen gebildet wäre, dann müßten, wie sofort zu sehen ist, die zwei Unterreihen durch wenigstens $2h-2$ Zeichen getrennt sein.

Schreibt man

$$CC_1 C_2 \cdots\cdots C_{h-1} = R$$

wo C aus A, und C_k aus A_k durch Vertauschen von x_1 und x_2 gebildet sind, so wird R in Bezug auf die $2h$ Zeichen x irreduktibel.

P und R gegen ja durch Vertauschen von x_1 und x_2 ineinander über.

Ferner wird

$$C_{h-1} = B_h = D.$$

Außerdem wird $C_{h-1} A = B_h A = B_h B_{h+1}$ in Bezug auf die $2h$ Zeichen x irreduktibel.

Satz 32. *Bedeutet $G[p, q, r]$ eine aus Buchstaben p, q und r gebildete Reihe, die in Bezug auf p, q und r irreduktibel ist, und schreibt man*

$$P = AA_1 A_2 \cdots\cdots A_{h-1}$$
$$Q = AB_1 B_2 \cdots\cdots B_{h-1} D$$
$$R = CC_1 C_2 \cdots\cdots C_{h-2} D$$

so wird die Reihe $G[P, Q, R]$ in Bezug auf die $2h$ Zeichen x irreduktibel.

Liegen mit anderen Worten je zwei einander gleiche Unterreihen von $G[p, q, r]$ außerhalb einander, so sind je zwei einander gleiche Unterreihen von $G[P, Q, R]$ durch wenigstens $2h-2$ Zeichen x immer getrennt.

Wir bemerken zunächst, daß sämtliche Reihen $A_{h-1} A$, $A_{h-1} C$, DA und DC irreduktibel sind.

Es bedeute S eine beliebige Reihe von Reihen A, $A_1, \cdots, A_{h-1}$, $B_1, \cdots, B_{h-1}$, C, $C_1, \cdots, C_{h-2}$ und D. Enthält dann S eine Unterreihe, die einer der genannten Reihen gleich ist, so ist sie auch mit einer dieser Reihen identisch. Alle die genannten Reihen, die von $2h+1$ Zeichen gebildet sind, enden ja nach rechts auf x_{2h}.

Jede der hier genannten Reihen ist durch die drei ersten linken Zeichen x völlig definiert.

Man sieht sofort ein, daß $G[P, Q, R]$ nicht zwei unmittelbar aufeinander folgende einander gleiche Unterreihen, die von Reihen A, $A_1, \cdots, A_{h-1}$, B_1, $B_2, \cdots, B_{h-1}$, C, $C_1, \cdots, C_{h-2}$, D gebildet sind, enthalten kann.

Ist nämlich eine beliebige der Reihen P, Q oder R aus zwei Reihen α und β zusammengesetzt, so ist die Reihe durch α oder β völlig definiert. α oder β ist für die Reihe charakteristisch. Wäre $G[P, Q, R]$ in Bezug auf die n Zeichen x reduktibel, so enthielte diese Reihe, da sämtliche Reihen AA_1, A_kA_{k+1}, $A_{h-1}A$, $A_{h-1}C$, AB_1, B_kB_{k+1}, B_hA, B_hC, CC_1, $C_{h-2}B_h$ und C_kC_{k+1} irreduktibel sind, eine Unterreihe UFU, wo F von $n-3$ Zeichen x gebildet wäre.

Wir wollen zunächst die Unmöglichkeit hiervon für den Fall, daß die eine Reihe U, und also auch die andere dieser Reihen in UFU eine der Reihen A, $A_1, \cdots, A_{h-1}$, $B_1, \cdots, B_{h-1}$, C, $C_1, \cdots C_{h-2}$ und D enthält, beweisen.

Das System dieser letzten Reihen wollen wir mit S bezeichnen. Die Reihen dieses Systems sind alle verschieden.

Wenn $aUFUb$ eine Unterreihe von $G[P, Q, R]$ ist, unterscheiden wir hier die zwei Fälle:

$$aUFUb = a\,\underbrace{\beta W_1 \cdots W_r \alpha}_{U}\,F\,\underbrace{\beta W_1 \cdots W_r \alpha}_{U}\,b \qquad \cdots \text{(I)}$$

$$aUFUb = a\,\underbrace{\beta W_1 \cdots W_r}_{U}\,\underbrace{\overbrace{\alpha}\,\overbrace{\gamma}}_{F}\,\underbrace{\overbrace{\delta}\,\overbrace{\beta} W_1 \cdots W_r \alpha}_{U}\,b \qquad \cdots \text{(II)}$$

wo jedes W in beiden Fällen, $a\beta$, $\alpha F\beta$ und αb im ersten Falle und $a\beta$, $\alpha\gamma$, $\delta\beta$ und αb im zweiten Falle eine Reihe des Systems S bedeuten, während im zweiten Falle $\gamma\delta = F$. (I) und (II) entsprechen den zwei Fällen, in denen F eine Unterreihe bildet entweder von einer einzigen Reihe oder von einer aus zwei Reihen zusammengesetzten Reihe des Systems S.

Zunächst wollen wir voraussetzen, daß $r \leqq 2$. Ist dann auch $h > 3$, so bilden im Falle I nicht jedes W_1 und jedes W_r den Anfang oder das Ende einer der Reihen P, Q oder R. Hier wird also entweder

$$\alpha F \beta = \alpha b \quad \text{oder} \quad \alpha F \beta = a \beta .$$

Da im Falle II α aus wenigstens 5 Zeichen x besteht, ist α für die Reihe $\alpha\gamma$ charakteristisch, oder

$$\alpha b = \alpha \gamma = W_{r+1} .$$

Ist aber $h > 3$, so bilden nicht W_{r+1} und W_1 den Anfang oder das Ende einer der Reihen P, Q oder R.

Ist also $a\beta$ von $\delta\beta$ verschieden, so enthält G die Reihe:

$$W_1 \cdots W_r W_{r+1} W_{r+2} W_1 \cdots W_r W_{r+1} W_{r+2}$$

wo

$$W_{r+2} = \delta \beta .$$

Da G in Bezug auf P, Q und R irreduktibel ist, kann also nicht gleichzeitig $r \leqq 2$ und $h > 3$ sein.

Man kann ferner auch nicht $r \leqq 2$, $h = 3$ haben.

Ist nämlich im ersteren Falle $\alpha F \beta$ von jeder der beiden Reihen $a\beta$ und αb verschieden, dann bekämen wir, da hier jede der Reihen W_1 und W_r den Anfang oder das Ende einer der Reihen P, Q oder R bilden müßte $W_1 = D$ und $W_r = A$, oder $W_r \alpha F \beta W_1 = Q$, was, da Q 4 Reihen des Systems S enthält, unmöglich ist. Dasselbe Räsonnement gilt auch für den Fall II, wo

$$aUFUb = a \beta W_1 \cdots W_{r+1} \delta \beta W_1 \cdots W_{r+1} .$$

Auf dieselbe Weise beweist man für $r = 1$ die Irreduktibilität von G in Bezug auf die Zeichen x. Wir brauchen nämlich hier bloß die zwei Fälle

$$aUFUb = \alpha \beta W_1 \alpha F \beta W_1 \alpha b$$
$$aUFUb = \alpha \beta W_1 W_2 \delta \beta W_1 W_2$$

zu berücksichtigen.

Wir wollen endlich beweisen, daß eine aus vier Reihen des Systems S in $G[P, Q, R]$ gebildete Reihe nicht eine Unterreihe UFU der genannten Art enthalten kann. Wir haben früher gesehen, daß eine etwaige Unterreihe UFU von $G[P, Q, R]$ hier nicht in einer Reihe von zwei Reihen des Systems S enthalten sein kann.

Die Reihe UFU kan sich ferner nicht über vier Reihen des Systems S erstrecken.

Ist nämlich UFU eine solche Unterreihe einer Unterreihe $\alpha a\,\beta b\,\gamma c\,\delta d$ von $G[P, Q, R]$ wo jede der Reihen αa, βb, γc und δd eine Reihe des Systems S bedeuten, während jede der Reihen α, β, γ und δ von 3 Zeichen x gebildet ist und also für die entsprechende Reihe des Systems S charakteristisch ist, so muß z eine der Reihen β oder γ in einer Reihe U von UFU enthalten sein.

Zwei der Reihen αa, βb und γc oder zwei der Reihen βb, γc und δd müßen also, was unmöglich ist, einander gleich sein.

UFU muß folglich eine Unterreihe von einer Reihe LMN von 3 Reihen L, M und N des Systems S bilden.

Da UFU zwei Zeichen x_{2h}, die nicht beide in F liegen können, enthält, so besitzt jede Reihe U ein Zeichen x_{2h}, und man erhält:

$$LMN = \underbrace{\gamma\,\overbrace{\alpha}^{U}\,\overbrace{\beta}^{U}}_{L}\,\underbrace{F}_{M}\,\underbrace{\overbrace{\alpha}^{U}\,\overbrace{\beta}^{U}\,\delta}_{N}$$

wo $U = \alpha\beta$ von vier Zeichen x gebildet ist. Da M und N verschieden sein müssen, enthält β weniger als 3 und α also wenigstens 2 Zeichen x. Aber dann müßten L und M einander gleich sein, was unmöglich ist.

Hierdurch ist also unser Satz (32) für den Fall, daß n eine gerade Zall $2h > 4$ ist, bewiesen.

Satz 33. *Läßt man in einer in Bezug auf die $2h$ Zeichen x irreduktiblen Reihe $G[P, Q, R]$ der genannten Art jedes Zeichen x_{2h} aus, dann wird die auf diese Weise gebildete Reihe H in Bezug auf die $2h-1$ Zeichen $x_1, x_2, \cdots x_{2h-1}$ irreduktibel.*

Je zwei einander gleiche Unterreihen von $H = G[P', Q', R']$, wo P', Q' und R' auf die genannte Weise aus beziehungsweise P, Q und R entstanden sind, müssen immer durch wenigstens $2h-3$ Zeichen x getrennt sein.

Eine etwaige Unterreihe UEU von H muß mehr als $2h-2$ Zeichen enthalten. Wir können deshalb annehmen, daß E von eben $2h-4$ Zeichen gebildet ist. Auf die erwähnte Weise ist UEU aus einer Unterreihe LMN von $G[P, Q, R]$, und E aus M entstanden.

Da L sowohl wie N wenigstens ein Zeichen x_{2h-2} enthalten müssen, können wir schreiben

$$U = \alpha_1\, x_{2h-2}\, \alpha_2\, x_{2h-2} \cdots\cdots \alpha_r\, x_{2h-2}\, \alpha_{r+1}\,.$$

Da man LMN umgekehrt aus UEU durch Einschaltung von Zeichen x_{2h} bilden kann, während die Stellungen der Zeichen x_{2h} durch die Stel-

lungen der Zeichen x_{2h-2} völlig definiert sind, sieht man ein, daß $L = M$. Da man ferner M aus E durch Einschaltung von höchstens einem einzigen Zeichen x_{2h} erhalten kann, ist hierdurch unser Satz bewiesen.

Es existieren also, wie wir früher behauptet haben, in n Zeichen, wenn $n > 4$ ist, irreduktible Reihen, bei denen die Anzahl der Zeichen größer als eine beliebig gegebene Zahl wird.

Für die Beihilfe, die ich seinerzeit vom »Nansenfondet« zur Ausarbeitung der vorstehenden Abhandlung empfangen habe, spreche ich hierdurch meinen besten Dank aus.

Nordstrand den 19. April 1912.

Axel Thue.

Gedruckt 18. november 1912.

G.E. STECHERT
& Co.
NEW YORK

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
511.3T42U C001
UBER DIE GEGENSEITIGE LAGE GLEICHER TEIL
3 0112 017001956